

pastel de manzana corregida, con lo que muchas cosas se acaban colando. La definición de lo que se necesita no es fácil y esto lleva a que en ingeniería civil los proyectos sean caros y lleven tiempo. Hay que vigilar con los asesores externos, no todos están capacitados para detectar dónde hay los errores significativos. También debes gestionar el entorno, disponer de la cocina (de los terrenos en general), que no haya estorbos (servicios afectados) y que todos

aquéllos cuya opinión puede hacer cambiar el contrato (alcaldes, diputados, presidentes de asociaciones de vecinos...) hablen en su momento o callen para siempre.

PD. Todo parecido de este escrito con la realidad de los ingenieros de Caminos es pura coincidencia.

Y a ti Pedro, que aún no te conozco personalmente, deseo que estas metáforas sean el inicio de una verdadera amistad. ■

Una solución alternativa del problema de la trisección del ángulo, con algunos recuerdos personales

PABLO RUBIO PÉREZ
Colegiado n° 1.588

En los números 326 y 328 de *La Voz del Colegiado*, nuestros compañeros Miguel Bronchalo de la Vega y José Ignacio González Soriano han llevado a cabo una revisión documentada de las tres cuestiones capitales *imposibles* en la literatura matemática, no resolubles con regla (no graduada) y compás, en un número finito de operaciones: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. La terna ha constituido una auténtica mitología milenaria de la tradición matemática hasta 1837, para las dos últimas, y hasta 1882 para la primera, años en que se demostró esta imposibilidad, como señala Miguel Bronchalo en la primera publicación. En ambos escritos se ha prestado énfasis a los antecedentes históricos más clásicos, los geómetras griegos y sus descubrimientos relacionados. Además, uno y otro trabajo incluyen respectivas soluciones, conocidas desde esa Antigüedad: el primero, con carácter aproximativo, para la duplicación del cubo, utilizando la curva cisoide de Diocles; y el segundo, como solución teórica rigurosa de la trisección del ángulo, que se efectúa mediante el deslizamiento de una regla graduada entre

rectas, lo que equivale a la aplicación de la curva conchoide de Nicomedes. Estas dos curvas auxiliares son cúbicas.

El problema de la trisección del ángulo, al que nos referimos también aquí, en concreto, se resuelve teóricamente como intersección de una recta con una cúbica (*conchoide de recta*) según la construcción descrita en detalle en la comunicación anterior mencionada, o bien con una cuártica (*conchoide de círculo*), siendo, en esta segunda solución, conocido a priori, uno de los cuatro puntos comunes.

Entre las ingeniosas y muy meritorias soluciones de aquellos grandes geómetras, mi preferencia se decide por la solución del genial Arquímedes de Siracusa, por su elegancia y sencillez, y ello tiene un carácter meramente subjetivo, también mediante deslizamiento de la regla graduada (el método *neusis*, del griego *neuein*, plural *neuseis*: inclinación, tendencia) con bordes limitados por una recta y una circunferencia, es decir, mediante la intersección de una recta, diámetro del círculo, y una conchoide de círculo que pasa por el centro del círculo, esto es, cuyo parámetro o segmento generador, es el

radio. En su escrito, José Ignacio González Soriano remite esta segunda solución, o, puede ser, alguna otra similar, distinta (*¿neusis* con espiral?), del mismo Arquímedes, a una referencia bibliográfica concreta, sin incluir su descripción detallada. Con posterioridad, los matemáticos de todos los tiempos han intentado múltiples soluciones a la construcción con regla y compás, hasta que la Academia de París rechazó su presentación en 1775, ante lo infructuoso de tales intentos. La cuestión se zanjó definitivamente en 1837 por nuestro semicolega Pierre Laurent Watzel, matemático e ingeniero, titulado por la Escuela Politécnica de París, que demostró una tal imposibilidad por la vía algebraica, como recuerda también Miguel Bronchalo.

Entre esta pléyade de soluciones, puede tener también interés el recordatorio de un procedimiento alternativo, menos clásico, en el sentido de la antigüedad de su conocimiento, que resuelve igualmente el problema teórico, mediante la intersección de dos cónicas, de muy simple definición. La cuestión se reduce así a la determinación de los cuatro puntos comunes de un haz de cónicas, uno de ellos explícito y extraño a la solución. Los tres puntos restantes son los vértices de un triángulo equilátero y corresponden a las tres soluciones del problema algebraico de grado tres, siendo uno de ellos, fácil de distinguir, la solución propiamente dicha.

El ángulo dato, α , es un ángulo central en el círculo de radio unidad, medido desde el eje OX en el sentido positivo habitual *sinistrorsum*, siendo la ecuación del círculo:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (I)$$

$P(x,y)$ es un punto solución, perteneciente a la circunferencia (I), es decir, escrito en el sistema polar correspondiente

$$P\left\{1, \frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right\}, k \in (0,1,2),$$

donde el valor $k = 0$ correspondería a la mencionada solución propiamente dicha. En la notación compleja se cumple

$$e^{ai} = (x + yi)^3$$

luego, pasando nuevamente al plano real, resultan las dos ecuaciones:

$$x^3 - 3xy^2 = \cos\alpha \quad (II)$$

$$-y^3 + 3x^2y = \sin\alpha \quad (III)$$

que representan dos cúbicas, cuyas respectivas intersecciones con la circunferencia unidad (I) incluyen las tres soluciones buscadas. Los puntos de intersección de cada una de estas cúbicas con (I) son, realmente, seis: los tres vértices comunes buscados y sus respectivos simétricos con relación a cada eje OX/OY, circunstancia asociada a la invariancia de cada función $\cos\alpha/\sin\alpha$ para ángulos simétricos respecto de cada eje OX/OY.

Este inconveniente se evita mediante la combinación lineal $x(II) + y(III)$, que da la ecuación:

$$x^4 - y^4 = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

y, teniendo en cuenta (I), se obtiene la ecuación de una hipérbola equilátera:

$$x^2 - y^2 - x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0 \quad (IV)$$

En este caso, los puntos de intersección de la circunferencia y la hipérbola son cuatro, siendo común el punto $P(\cos\alpha, -\sin\alpha)$, extraño a la solución, e introducido por la combinación lineal realizada. Como hemos indicado anteriormente, los otros tres puntos, soluciones del problema algebraico, son vértices de un triángulo equilátero inscrito.

También es bien sabido que la resolvente genérica de una ecuación de grado cuatro es otra ecuación de grado tres. La eliminación de cada variable y/x , respectivamente, en las ecuaciones (II)/(III), con (I), es inmediata. Las dos ecuaciones cúbicas resultantes, en cada variable x/y , quedan expresadas, además, en la forma reducida usual.

La hipérbola (IV) tiene una definición muy simple: los ejes son paralelos a los ejes coordenados; las asíntotas son paralelas a las bisectrices de los ejes coordenados; pasa por los puntos O (ortocentro del triángulo solución inscrito) y P', y el centro es el punto medio de OP'. Las tangentes en O y P' (extremos de diámetro) son paralelas a la dirección perpendicular a OP. La ecuación reducida al centro resulta:

$$x^2 - y^2 = 1/4$$

datos, todos ellos, que simplifican la construcción de la hipérbola.

Se obtienen, igualmente, las dos parábolas del haz:

$$2x^2 - x \cos \alpha - y \sin \alpha - 1 = 0 \text{ (V)}$$

$$2y^2 + x \cos \alpha + y \sin \alpha - 1 = 0 \text{ (VI)}$$

Los elementos fundamentales de estas dos cónicas son, igualmente, fáciles de determinar, así como una construcción geométrica sencilla del haz de cónicas y de las soluciones (obviamente, no simplemente usando regla y compás), que omitimos por falta de espacio y por la carencia, en nuestro PC, de capacidad gráfica mecanizada, animando a realizar esta representación gráfica, que se comprueba muy ilustrativa, al posible lector interesado en el tema que disponga de aquella capacidad, o si quiera de forma manual. Destacaremos, de nuevo, únicamente, que un punto extraño común es P'.

No nos extenderemos, tampoco, en la determinación de algunos casos singulares, en los que la solución con regla y compás es posible, que corresponden a la descomposición de cada cónica en el producto de dos líneas rectas. Se obtienen así valores respectivos del ángulo α ,

$$(2k + 1) \frac{\pi}{4}, k\pi \text{ y } (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

para cada una de las cónicas, siendo también practicables, obviamente, sus sucesivas divisiones binarias. La representación gráfica de estos casos es, asimismo, ilustrativa.

Debo decir, finalmente, aquí, que mi aportación en esta cuestión ha sido, básicamente, memorística, dado que el enunciado de este procedimiento alternativo figuraba en la colección de problemas de la Academia Luz, y se incluía, esporádicamente, en las hojas diarias de problemas propuestos, por lo que podría ser recordado, igualmente por otros muchos compañeros.

Quisiera recordar también, al respecto, la importancia y el mérito de las academias preparatorias en la intrahistoria de nuestra profesión, pues han ejercido, sin duda, un papel esencial en la formación básica primaria del ingeniero, como entiendo que siga ocurriendo. Algunos colegiados han hecho anteriormente referencia, en *La Voz*, a vivencias en ésta y en otras academias, igualmente prestigiosas. Yo me refiero aquí, singularmente, a la Academia Luz, antes citada, creada y dirigida por los ingenieros de Caminos Rafael Gómez de los Reyes (†) e Isidoro Cano de la Torre (†), de trato abierto y directo con todos nosotros, que encabezaban un plantel de profesores, auxiliares y correctores de problemas, algunos entre los mismos alumnos, con inclusión del prestigioso profesor don Inocencio Aldanondo, de la Facultad de Ciencias Exactas, ¡un matemático de primera línea!, y de muy grato recuerdo todos ellos. Con excelentes cualidades didácticas, desarrollaban una labor intensa y meritoria en las distintas materias de nuestro examen de ingreso, contando, eso sí, con un alumnado especialmente motivado.

Por mi parte, llegué a la Academia Luz desde Cuenca, como becario, de la mano de una familia-saga de ingenieros de Caminos conquenses, don Nicasio Guardia (†), para mí, un buen amigo de mi padre, y cuatro de sus cinco hijos, Francisco (Paco, †), Baltasar (Baltá), Salvador (Salva, †) y José (Pepe, †), quienes me pusieron, además, en contacto, con un ingeniero entrañable y, más adelante, compañero, Antonio Angulo Álvarez, entonces veraneante en nuestra ciudad durante sus vacaciones familiares, de cuya vitalidad polifacética

y colegial venimos teniendo constancia diversa en *La Voz*. Su relación conmigo, más tarde, en la Escuela, en su función de adjunto de la asignatura de Electrotecnia, fue especialmente cordial, y me facilitó recomendaciones eficaces para la realización del trabajo de campo de la

asignatura de Maquinaria, mi primera experiencia cuasi laboral en una obra importante, y para el acceso a la vida profesional, a la finalización de la carrera, ayudas que nunca he olvidado.

A todos ellos, ausentes (†) y presentes, mi gratitud. ■

Nota: En cumplimiento de las normas establecidas en las condiciones técnicas de las comunicaciones remitidas a La Voz del Colegiado, este tema de debate se considera finalizado tras la publicación de este artículo.

Quinta carta abierta a Carlos Garau: la respuesta a la pregunta ancestral

CARLOS SOLER LICERAS
Colegiado nº 6.410

Cuando se sepa de dónde viene la sal del mar, puesto que de los continentes no puede venir, tendremos entonces un dato sobre la enorme magnitud de la erosión oceánica. La erosión fluvial la vemos actuar y somos capaces de darnos cuenta de que todo el terreno que falta en un valle se lo ha llevado el agua erosionando, transportando y sedimentando la mayor parte en el mar. Tan colosal hazaña la consigue desmoronando laderas, convirtiéndolas en acarreos, luego en arena y al final diluyendo y transportándolo todo en forma de aniones y cationes. Esto es la salinidad del agua de los ríos y cuando desembocan en el mar lo hacen llevando alrededor de un gramo por litro. Evidentemente unos más y otros menos. De alguna manera, podría decirse que la cantidad de sales que acarrea da el orden de magnitud del proceso erosivo y sedimentario que provoca, y ello lo hace continuamente. Dice un proverbio árabe que todo duerme... salvo el agua y el rencor.

Entonces, y sabiendo que la salinidad del mar es de 36 g/l, podríamos decir que los procesos de erosión y sedimentación que se producen en el fondo del océano son 36 veces mayores que los que se producen actualmente en los continentes. Aquí, Carlos, y sinceramente te lo digo, creo que me he quedado corto.

La erosión oceánica ha pasado con este sencillo razonamiento a ser enorme: 36 veces la fluvial. Lo que cuesta trabajo entender es que no se hayan dado cuenta antes, ¿cómo es posible que los geólogos no sepan que el fondo del océano se erosiona?... Nunca antes nadie lo ha planteado y lo que me resulta aún más increíble es que lo tenga que explicar en este foro. ¿No somos ingenieros de Caminos, Canales y Puertos? ¿Cómo es posible que dudemos del primer principio de la hidráulica: *toda corriente de agua circulando por un cauce provoca los procesos de erosión, transporte y sedimentación?* En el océano circulan corrientes profundas; el agua es la maestra de la paciencia; al agua sólo hay que darle tiempo y movimiento, el resto, por increíble que parezca, lo hace sola. Ni el acero, ni el cristal, y menos aún los materiales que forman el fondo de los océanos, resistirían tantos eones de lenta e inexorable insistencia.

Lo del gramo y los 36, querido Carlos, es un orden de magnitud; hay ríos que llevan más sales y otros menos; hay mares como el de Cortés y el Rojo que tienen 42 g/l. Por cierto que aquí tienes una bonita paradoja: los mares más salinos no tienen ríos que les viertan sus caudales, no tienen ninguno; el agua del Colorado prácticamente no llega a desembocar y en Aqaba no hay ríos. Este hecho contradice la teoría actual