

para la creación de una organización equivalente a la que agrupa las empresas de ingeniería, ésta para agrupar a las empresas de ingenieros, una Asociación Española de Sociedades Profesionales.

Yo por mi parte he adquirido un sitio en la web, <http://sociedadesprofesionales.org>, que gustosamente cederé para esta finalidad. En lo que a mi toca, con tratar de convencer a mis propios hijos, tengo ya bastante. ■

El Pitágoras multidimensional

PABLO RUBIO PÉREZ

Colegiado n.º 1.588

Los dos “tesoros” de la matemática (Kepler *dixit*), legado de nuestros antecesores, los grandes geómetras griegos o, parece ser, de otros aún más antiguos, son la *aurea sectio*, que simboliza el número $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$, y el teorema de Pitágoras, que relaciona las longitudes de los lados, hipotenusa y los dos catetos, de un triángulo rectángulo, BAC , siendo A el vértice del ángulo recto, mediante la conocida expresión, desde la misma enseñanza básica, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, (I)

La definición alternativa de la fórmula (I) relaciona las longitudes de un vector y de sus dos proyecciones sobre los ejes de un sistema coordenado rectangular.

La fórmula pitagórica ha sido el objeto de un número centenario de demostraciones, para algunos autores, superior a mil, después de la más antigua conocida, y quizá la más famosa de todas, aunque no la más simple, que figuraba ya, como Proposición I.47 en los Elementos de Euclides. En esta pléyade de demostraciones, producidas en todas las épocas, y procedentes de las más diversas geografías planetarias, se incluyen tanto pruebas gráficas como algebraicas, muchas de ellas de especial elegancia por su sencillez. Podemos mencionar, con limitación autocontenida, además de la inicial (la recogida por Euclides), la demostración gráfica china (reducida a una descomposición areal de la figura base que representa un cuadrado inscrito en otro cuadrado), y, como dato anecdótico, la del

presidente Garfield de Estados Unidos, también prueba gráfica, muy relacionada con la anterior. La bibliografía sobre todas estas demostraciones del Teorema de Pitágoras es, asimismo, sumamente profusa.

En algunas de estas publicaciones se recoge, también, una primera extensión de la fórmula clásica en el espacio tridimensional, referida a las áreas de un triángulo y de sus tres proyecciones sobre las caras de un triedro trirrectángulo, con la denominación de Teorema de Gua,

$$S^2 = S_{yz}^2 + S_{zx}^2 + S_{xy}^2, \text{ (II)}$$

expresión equivalente a la conocida relación entre los ángulos de un vector, y, en particular del versor normal al plano del triángulo, con los tres ejes coordenados, que se escribe a continuación,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

y que equivale también, a su vez, a una segunda expresión pitagórica tridimensional de la longitud de un vector,

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2, \text{ (III)}$$

Hay, todavía, una tercera expresión cuasi pitagórica, alternativa de (III), en el espacio de tres dimensiones, de deducción elemental, teniendo en cuenta (I) y (III), que relaciona las longitudes del vector y las de sus tres proyecciones sobre los tres planos coordenados,

$$I^2 = \frac{1}{2}(I_{yz}^2 + I_{zx}^2 + I_{xy}^2), \text{ (IV)}$$

Las fórmulas (II) y (III) se extrapolan en espacios de dimensiones superiores a 3, lo que se ha definido como Teorema de Pitágoras generalizado multidimensional. La estructura de esta fórmula generalizada, que expresaremos después, conserva el formato pitagórico clásico.

Como veremos también, la fórmula (IV) anterior, cuasi pitagórica, va a servirnos, además, de punto de partida y de ejemplo para una extensión propia, que creemos original, de la anterior fórmula pitagórica generalizada multidimensional. La información sobre la fórmula característica pitagórica multidimensional, y de nuestra extensión cuasi pitagórica, que es una extrapolación multidimensional de (IV), es nuestro objetivo principal en esta comunicación.

En las últimas décadas se han publicado, en efecto, generalizaciones análogas a (II) y (III), de la fórmula básica (I), en un espacio n -dimensional, para cualquier dimensión $n > 3$, utilizando diferentes metodologías, que, a diferencia de la fórmula primitiva y sus derivaciones comentadas, en el espacio de 3 dimensiones, no han alcanzado un nivel de divulgación universalizada más allá de los propios medios matemáticos especializados.

Aunque la n -ésima dimensión para valores $n > 3$ no corresponde a nuestro ámbito profesional de actuación, en el espacio físico tridimensional, el conocimiento de estas abstracciones (¿o realidades?) matemáticas tiene indudable interés científico y cultural. Disciplinas en la vanguardia científica, como son la astrofísica y la física de partículas, consideran con respeto las teorías más avanzadas, para condiciones de velocidades superelevadas o masas elementales, en las que los conceptos de masa y energía se (con)funden, desde la elaboración por Einstein de sus teorías relacionadas con un universo *espacio-tiempo* curvado. Así, para el sabio Einstein (físicas de la relatividad restringida y/o de la gravedad modificada), junto con

Weil (electromagnetismo), nuestro universo sería un espacio curvo, no-euclidiano, de cuatro dimensiones del tipo riemanniano (elíptico), de curvatura positiva, que se sitúa a su vez en un universo superior de cinco dimensiones. Las investigaciones en campos como la mecánica cuántica (Plank, Boltzmann) o la química micro-atómica (Bhor, Rutherford, Braggs) han dado origen a la denominada Teoría de las Cuerdas, a la que Einstein dedicó sus esfuerzos postreros, y que ha tenido después continuación por otros matemáticos y físicos. La Teoría de las Cuerdas, en distintas acepciones: supercuerdas, cuerdas vibrantes... pretende establecer un ambicioso modelo unificado integral de nuestra ciencia y del universo, asociado a un espacio de hasta diez dimensiones (las tres coordenadas del espacio físico, el tiempo y diversas fuerzas gravitatorias y electromagnéticas, fuertes y débiles), aún por consolidar.

Los procedimientos más aplicados en la demostración de la fórmula de Pitágoras generalizada se basan en recursos conocidos del álgebra matricial, que no son particularmente sofisticados. No es nuestro objeto esbozar aquí las líneas de este análisis matemático, que no corresponden a nuestra revista, aún, como decimos, de complejidad sólo relativa, limitándonos a las dos definiciones más básicas y a las dos expresiones finalmente obtenidas.

Se considera un hiperpoliedro de dimensión k , con $k+1$ vértices, en un espacio E_n ($1 \leq k < n$), o en la denominación matemática moderna k -politopo o k -simplex. El caso más simple, $k=1$, se refiere a un vector. El sistema de referencia, definitorio del espacio E_n , es un sistema cartesiano ortonormal (*espacio euclídeo*). El hipervolumen, también k -volumen, V_k , es la integral múltiple, extendida al recinto k -dimensional limitado convexo, R_k ,

$$V_k = \iint \dots \int_{R_k} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

La fórmula pitagórica generalizada característica, y nuestra extensión cuasi pitagórica, son, respectivamente:

$$(V_k)^2 = \sum_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} [V_k^k(i)]^2, \text{ (V)}$$

$$(V_k)^2 = (C_{h-k}^{n-k})^{-1} \sum_{i=1}^{i=\binom{n}{h}} [V_k^h(i)]^2, \text{ (VI)}$$

cuya expresión literal, referida a la segunda fórmula (VI), por ser la más general, se escribe:

En un espacio cartesiano ortonormal n -dimensional, E_n , el cuadrado del hipervolumen del politopo convexo definido por un número k de vectores independientes, con un origen común, siendo k inferior a la dimensión n del espacio E_n , es igual a la suma de los cuadrados de los hipervolumenes proyección sobre cada subespacio definido por los ejes coordenados de cualquier dimensión h , igual o superior a la dimensión (k) del politopo ($1 \leq k \leq h \leq n-1$), multiplicada por el coeficiente numérico C_{h-k}^{n-k} , siendo C_{h-k}^{n-k} el número combinatorio de índices $n-k$ y $h-k$.

La formulación pitagórica característica (V) es la correspondiente a la

expresión (VI), para valores $h = k$, en cuyo caso el coeficiente numérico es, efectivamente, 1. En la deducción de la fórmula (V) el k -politopo base se proyecta, en concreto, sobre todos los subespacios coordenados de su misma dimensión k , siendo así: (I), $n = 2$, $k = 1$; (II), $n = 3$, $k = 2$, y (III), $n = 3$, $k = 1$ los tres casos particulares más simples. La fórmula (VI), más general, se aplica ya en (IV), $n = 3$, $h = 2$, $k = 1$, también como el caso particular más simple.

Remitimos a los posibles lectores interesados en el desarrollo matemático completo a la siguiente monografía (33 páginas), que hemos publicado como libro electrónico: <http://www.bubok.com/libros/22404/una-extension-del-teorema-generalizado-de-pitagoras-en-espacios-ndimensionales>

La descarga, que fija el autor, es gratuita, y el precio del libro impreso en papel, a pedido, es de 6,97+0 €, que han sido las participaciones respectivamente fijadas por la editorial Bubok y por el autor. ■

El agua provincializada

FERNANDO SÁENZ RIDRUEJO

Colegiado n° 1.934

Me ha gustado, desde el punto de vista formal, la réplica de Juan Luis Ramírez Vacas a José María Vizcayno, acerca de las inundaciones en Andalucía. Primero, por su tono cordial, tan de agradecer, en contraste con las ásperas trifulcas que últimamente se montan en *La Voz del Colegiado*. En segundo lugar, por su habilidad dialéctica. Dijérase que Juan Luis conoce el consejo de don Francisco Silvela: “Cuando tengas razón, concreta; cuando no la tengas, generaliza”.

Generaliza cuando alude a “la eterna cantinela, tan traída y llevada, acerca de la transferencia de competencias de la Administración del Estado a la

Comunidad Autónoma”. Descalifica así, de un plumazo, el mero hecho de tratar de un asunto que está en la raíz del problema y que a la mayoría de los ingenieros hidráulicos nos ha escandalizado.

Se ha violado el principio de la competencia estatal sobre las cuencas intercomunitarias y, mientras el Tribunal Constitucional no se defina (y es de temer que, con su habitual diligencia, no lo hará en los próximos dos o tres años), tendremos el derecho a —e incluso la obligación de— seguir hablando del asunto.

A las órdenes de un gran ingeniero andaluz, participé, hace ya más de veinticinco años, en la redacción del primer