

- Ha aumentado la erosión costera en el Mediterráneo, por el fenómeno de que “las corrientes litorales van siempre saturadas”.
- Ha disminuido la pesca en el banco frente al regresionado delta, por haber disminuido los aportes de nutrientes a través de los brazos.

La visita al templo de Abu-Simbel se ha convertido en uno de los máximos atractivos de la zona sur, y sus caravanas (ahora de visitantes en autobuses, turismos y taxis) se organizan a partir de las tres de la madrugada escoltadas por la policía y pasan sobre la presa antigua (de 2 kilómetros de coronación) y toman la carretera en la margen izquierda, que sólo tiene una o dos curvas en sus 300 kilómetros y numerosas máquinas barredoras (una especie de vialidad estival) para que la caravana pueda discurrir a una velocidad endiablada, llegando a las siete de la mañana, con lo que da tiempo a ver el templo salvado de las aguas y cuya reconstrucción se ha realizado con esmero, ya que resultan casi imperceptibles los cortes de la piedra realizados para su traslado, y como ese templo era subterráneo en su mayor parte, ha habido que construir

una montañita artificial que es lo que más delata el origen poco genuino del actual monumento en medio de la planicie desértica. Como el interior del templo está tranquilo y confortable, entran también aves voladoras, que no carean, a diferencia de la parroquia de Santo Domingo de la Calzada. Al regreso se vuelve a formar la caravana a las 11, esta vez casi en un santiamén, dejando el espacio libre para los visitantes en avión, y se realiza una parada sobre la nueva presa, con 40 metros de anchura en coronación, si bien no se recorre toda esa coronación y desde sus 111 metros de altura sobre cimientos se obtiene la vista del lago Nasser, de 550 kilómetros de longitud y 35 kilómetros de anchura máxima, habiéndose inundado la parte habitada de la Baja Nubia, lo que provocó el desplazamiento de más de 60.000 personas para ser realojadas. También se ve la flor de loto, monumento de hormigón, que debe equivaler al 0,5% cultural que se aplica en nuestras latitudes. Actualmente, todos los países del alto y medio Nilo pretenden erigir presas semejantes, para quedar como Tajo y Guadiana, a lo que se opone Egipto, y para decepción de ecologistas. ■

Una relación de los pares de números recíprocos potenciales con la función enumerativa asintótica de los números primos

PABLO RUBIO PÉREZ
Colegiado n° 1.588

En su opinión “Los números recíprocos potenciales” (*La Voz del Colegiado*, julio-agosto, n° 339), nuestro compañero Antonio García Martínez define el par de números (a, b) , con la denominación indicada en el título, que cumplen la relación

$$a^b = b^a \quad (\text{I})$$

o bien, la relación equivalente

$$a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}} \quad (\text{II}),$$

y mediante representación gráfica de la función

$$y_1 = x^{\frac{1}{x}},$$

deduce que existen infinitos pares de números reales (a, b) que cumplen las relaciones anteriores, situados respectivamente

en cada intervalo $1 < a < e, e < b < \infty$, con la conclusión adicional, inmediata, de que (2, 4) es el único par solución de dos números enteros.

A la misma conclusión se llega mediante la representación gráfica de la siguiente función y_2 , como alternativa de y_1 , siendo L la función logaritmo natural (de base el número e):

$$y_2 = Ly_1 = \frac{Lx}{x},$$

y que destacamos aquí, principalmente, por desempeñar un papel sumamente importante en la matemática, ya que y_2 es la inversa de la función que, con la notación $\pi(n) = n/Ln$, es la denominada función enumerativa de los números primos. Esta tercera función, $y_3 = x/Lx$, puede utilizarse igualmente como alternativa de y_1 e y_2 para el análisis de los pares (a, b) .

La búsqueda de un patrón de distribución de los números primos en la sucesión de números naturales ha sido y sigue siendo objeto de investigación de matemáticos importantes.

A primeros del siglo XIX, Legendre y Gauss conjeturaron de forma independiente que, cuando $n \rightarrow \infty$, el número de números primos, menores o iguales que n , es asintótico a $\pi(n)$.

Las demostraciones de su conjetura fueron avanzando a través de los descubrimientos de Chevishev, Hadamard y De la Vallée Poussin, con la aplicación de procedimientos altamente sofisticados, y no fue hasta 1949 cuando Selberg y Erbös encontraron una demostración por métodos elementales. En la matemática actual, esta conjetura inicial se conoce como “teorema de los números primos”.

Por otro lado, la obtención por Antonio García Martínez de expresiones paramétricas de ambos números, a y b , en ambas versiones real y racional, es ciertamente ingeniosa. En particular, de las expresiones racionales para valores enteros del parámetro u se deduce el valor del límite común de a y b , recogido en su artículo como la propiedad 3 del resumen:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} a = \lim_{u \rightarrow \infty} b = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

En la expresión anterior se reencontra la propia definición más clásica del número e !, la gran creación de Leonhard Euler, esencial, desde entonces, en la aplicación matemática.

Un remate adecuado de su exposición sería, además, la representación gráfica de la curva $f(a, b) = 0$, definida por cualquiera de las expresiones (I)/(II), o por las ecuaciones paramétricas indicadas más generales, para valores reales (rationales/irracionales) de a y b en función del parámetro $k = b/a$.

Mediante la simple inspección de cualquiera de las representaciones de y_1 , y_2 o y_3 , se deduce que $f(a, b) = 0$ está contenida en el primer cuadrante definido por las rectas $a = 1$, $b = 1$, y es asintótica a las mismas, y simétrica respecto de su bisectriz principal. Pasa por el punto (2, 4) y su simétrico, y corta al eje de simetría en el punto (e, e) , con pendiente -1 , punto este que corresponde al máximo de ambas funciones y_1 e y_2 , y al mínimo finito de y_3 , y tiene pendiente negativa en todos sus puntos. Según la impresión del examen visual de cualquiera de estas tres curvas, el trazado de $f(a, b) = 0$ resultaría similar al de una rama hipérbolica equilátera, también asintótica a las rectas $a = 1$, $b = 1$, aunque para esta confirmación y para comprobar que la curva no serpentea (sin inflexiones) debe estudiarse, en detalle, el entorno asociado a los puntos de inflexión implicados de y_1 , y_2 o y_3 , lo que requiere ayuda computerizada, por la complejidad de las ecuaciones pertinentes. En este sentido, ofrecen ventaja las funciones y_2 e y_3 : la curva $y_2 = 0$ tiene un único punto de inflexión explícito, en $x = b = e^{3/2}$ (el valor correspondiente de a , no explícito, exige, igualmente, ayuda computerizada), mientras la curva $y_3 = 0$ tiene un punto de inflexión impropio y otro propio, también explícito, en $x = b = e^2$. En cambio, la curva $y_1 = 0$ tiene dos puntos propios de inflexión no explícitos, asociados a una ecuación trascendente, que ha calculado Antonio García Martínez de forma aproximada, sin duda con alguna dificultad (ζ^2).

El punto de inflexión afectado de la curva y_1 , $x=4,36\dots$, según este cálculo aproximado citado, coincide prácticamente con el anterior valor indicado explícito, $e^{3/2}$, del único punto de inflexión de y_2 , y es también próximo al único punto propio de inflexión de y_3 .

Con mayor precisión, utilizando las ecuaciones paramétricas de a y b , los puntos de inflexión de la curva $f(a, b) = 0$ corresponden a las raíces de la siguiente ecuación trascendente, excluyendo el valor $k = 1$, que determina el punto (e, e) , ya identificado:

$$k(Lk)^2 - 2(k^2 - 1)(Lk) + 3(k - 1)^2 = 0.$$

El barrido computacional de los valores del primer miembro de esta ecuación en uno cualquiera de los intervalos $(0,1)$ o $(1,\infty)$ —obsérvese que la ecuación es, lógicamente, recíproca— permite descartar definitivamente la existencia de inflexiones, por lo que la posición y forma definitiva de la curva son, como decimos, similares a la rama hiperbólica equilátera antes descrita (en realidad es suficiente considerar la semirrama).

Se llega a la misma conclusión, lo que es un ejercicio muy interesante para estudiosos de la geometría analítica, mediante la representación gráfica conjunta de las curvas

$$z = Lk$$

$$kz^2 - 2(k^2 - 1)z + 3(k - 1)^2 = 0,$$

que tienen el único punto común $k = 1$, $z = 0$, con tangente también común $z = k - 1$. El punto $(1,0)$ es, además, un punto singular de la segunda curva, con dos tangentes distintas, $z = k - 1$ y $z = 3(k - 1)$. Otras sugerencias para su dibujo: cúbica paramétrica, con tres asíntotas reales y una inflexión propia, sin otras tangentes horizontales ni verticales.

Deseo que este comentario adicional, sobre su anterior opinión, pueda interesar a nuestro compañero. Disiento con él, sin embargo, en el calificativo de *matemáticas inútiles*. No es éste el caso, pues, como vemos, su planteamiento inicial, que pudiera parecer algo inocuo a primera vista, está directamente relacionado con dos aspectos muy relevantes de la matemática universal: uno, el número e , consolidado y fundamental en la práctica matemática; y otro, la secuencia de los números primos, todavía irresuelto, que ha sido uno de los temas más estudiados por los matemáticos más importantes en todas las épocas, desde los mismos griegos (Euclides, Eratóstenes), y que sigue siendo el objeto de investigaciones y tesis destacadas en muchas universidades, entre ellas la nuestra.

Por otro lado, y como apunta también en su opinión Antonio, las denominadas *matemáticas recreativas* merecieron una continuada atención del brillante divulgador matemático y filósofo de la ciencia, Martin Gardner, y hago referencia aquí al ideario expresado en las introducciones de sus textos (por ejemplo, *Carnaval Matemático* y *Circo Matemático*, en traducciones de Alianza Editorial, S.A.), con reflexiones sobre los incentivos y beneficios reales, aún intangibles, para el desarrollo matemático personal, y en ocasiones sorprendentemente científico, de estas dedicaciones. Aunque nuestra profesión figure, por supuesto, en cabeza de las dirigidas a la utilidad inmediata, es también indudable que toda acción creativa no malévola, aún anónima, representa un valor significativo para el progreso humano, en su sentido más metafísico, y desde luego, siempre, una satisfacción importante para su creador. ■