

Optimización de superficies de geometrías tridimensionales

PABLO RUBIO PÉREZ
Colegiado n° 1.588

En el n° 343 de *La Voz* se ha publicado la opinión *Disquisiciones matemáticas sobre el ahorro de encofrado en obras de hormigón* de David Verges Guri, en la que se calculan las dimensiones óptimas de un encofrado troncopiramidal recto de base cuadrada de lado $l = 5m.$, para un volumen total $V = 125m^3$. Los resultados aproximados de las dos incógnitas del problema, esto es, el lado L del cuadrado de la base superior abierta y la altura H , son respectivamente $L = 7,69m.$ y $H = 3,06m.$ La superficie lateral mínima es así $S = 84,81m^2$.

El planteamiento matemático de la función optimizante, con la condición de restricción de volumen indicada, es muy simple, ya que esta última condición permite la eliminación directa de la segunda variable, la altura. La anulación de la derivada de la función resultante de esta eliminación, dependiendo sólo, por tanto, de la primera variable, da la siguiente ecuación polinómica de grado 7, que se menciona en la opinión publicada, aunque no se haya figurado explícitamente en el texto

$$(x-1)(x^2+x+1)^3 - 18(x+2) = 0, x = \frac{L}{l}. \text{ (I)}$$

La gráfica de la función que representa el primer miembro de la ecuación, en el primer cuadrante, es una rama parabólica de grado 7, con $f'(x) > 0$ en $x \geq 1$. La raíz positiva en $x \geq 1$, se obtiene mediante aplicación del método de Newton inicializado en $P(2,271)$, y da la solución $x = 1,54$, a la que corresponden, en efecto, los valores del óptimo, calculados, en la opinión anterior, mediante un barrido numérico.

La familia de poliedros de la forma volumétrica descrita incluye al cubo como su miembro más simple, para el cual la superficie lateral es de $100 m^2$,

lo que ha supuesto conseguir sobre el mismo una reducción del 15%, como se señalaba en el texto anterior. En la misma familia podemos incluir aún, la forma más general de artesa, es decir, con ambas bases rectangulares, manteniendo las constantes de área de la base y volumen, pero esta variante no modificaría la geometría óptima obtenida, en virtud del teorema del valor medio de Rolle.

Consideramos ya el problema planteado teórico estricto sin interferencia de la forma de la pieza hormigonada, que si está decidida por otros motivos de diseño, prácticos o funcionales, hace obviamente superfluos otros análisis. Aunque la estudiada pueda ser la configuración más sencilla y su fabricación la más económica, la matemática proporciona soluciones geométricas diferentes, aún más afinadas. Sin entrar en una consideración extensiva de las posibles variantes, nos centraremos en principio, por seguir con la línea anterior, en la forma troncopiramidal recta similar, cuya base es un polígono regular de n lados y de área s dada, a cuya familia, ahora más general, pertenece también la forma geométrica de base cuadrada anteriormente estudiada. Supondremos también una disponibilidad del emplazamiento superior a la superficie de la proyección en planta de la solución que obtengamos.

La nueva ecuación optimizante obtenida es del mismo tipo que (I), con la única variación del coeficiente numérico del segundo término en el primer miembro de (I). Se obtiene en efecto

$$(x-1)(x^2+x+1)^3 - (x+2)[\alpha(n)] = 0, x = \frac{L}{l}, \text{ (II)}$$

con el siguiente valor del parámetro

$$\alpha(n) = \frac{9}{2} \times \frac{V^2}{s^3} \times n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

La raíz positiva $x \geq 1$ de (II) para distintos valores de n , se calcula fácilmente también, como la del caso $n = 4$, mediante aplicación del método de Newton, habiéndose obtenido, como ejemplos ilustrativos adicionales, los siguientes resultados aproximados a partir de los dos valores anteriores fijados $s = 25m^2$ y $V = 125m^3$.

n	$l(m)$	$r(m)$	x	$L(m)$	$R(m)$	$H(m)$	$S(m^2)$
3	8,22	4,75	1,80	14,79	9,22	2,48	98,81
4	5,00	3,55	1,54	7,69	6,46	3,06	84,81
6	3,12	3,12	1,51	5,02	5,02	3,54	79,60
∞		2,83	1,48		4,17	3,62	77,02

La función $S(n)$ es decreciente para valores crecientes de n , con el mínimo absoluto asintótico para $n \rightarrow \infty$, y se comprueba, en definitiva, la conclusión, por otro lado previsible, de que el mínimo de la familia ampliada, que como decimos incluye a la considerada inicialmente, corresponde, en el límite, a las bases circulares y por tanto a una configuración geométrica troncocónica. La economía sobre la solución óptima anterior de base cuadrada es del 8,3%. Además si se plantea el problema inicialmente sobre esta última configuración troncocónica de base inferior fijada, siendo las variables el radio de la base superior abierta y la altura, el óptimo obtenido será naturalmente el mismo, pues la ecuación resolvente es la (II) con

$$\alpha(\infty) = \frac{9\pi}{2} \times \frac{V^2}{s^3}; x = \frac{R}{r}.$$

Sin embargo la cuestión teórica matemática no queda totalmente resuelta, pues pueden considerarse otras configuraciones. Las más próximas a la analizada serían prismatoides rectos cualesquiera, de bases paralelas con caras poligonales no homotéticas directas. En la misma opinión anterior arriba citada, se apuntaba ya también algún esbozo de intención sobre posibles superficies óptimas curvas, como

ha resultado ser, finalmente, la solución troncocónica recta de base circular.

El esquema de superficie lateral curvada es obligado para formas planares distintas en una y otra base, si una de ellas no es un polígono, o si no lo son ambas. Por ejemplo si la base inferior es un cuadrado y la base abierta superior fuera una circunferencia con el mismo eje central. En este último caso la superficie lateral más conveniente, compuesta a su vez por otras cuatro idénticas pero diferentes, resultado de tres giros sucesivos de 90° de una de ellas, sería una superficie reglada no desarrollable. Hemos tanteado este problema y la definición de la superficie no ofrece dificultad, así como la formulación del volumen constante, pero la formulación de la función objetivo, la superficie lateral, hace las ecuaciones inmanejables incluso en este caso de geometría relativamente sencilla.

Hay todavía una salida analítica que la intuición nos hace creer definitiva, y es la familia de superficies de revolución construidas sobre la base circular, a la que pertenece también el esquema troncocónico circular recto, que supone nuestro óptimo actual.

La aplicación del cálculo variacional integral, en concreto la ecuación de Euler-Lagrange, con las mismas restricciones de base inferior circular y de volumen dados, combinado, por esta segunda condición, con el método del multiplicador de Lagrange, permite, en efecto, la formulación de una ecuación diferencial cuya solución de la curva meridiana, generatriz de la superficie, se obtiene en forma paramétrica explícita para la variable radio de la sección normal al eje, pero como forma integral no explícita para la variable altura de dicha sección. La complejidad de este resultado requeriría recursos muy importantes de computación para su aplicación numérica.

Una observación curiosa es que el planteamiento de superficie mínima de revolución de bases circulares y altura fijadas, más simple que el anterior, al poder prescindir del término

penalti que introduce el multiplicador de Lagrange en la definición de la función objetivo, da como resultado para la curva generatriz una catenaria la cual, una vez obtenida, no nos ha causado ninguna extrañeza pues esta última curva tiene un papel relevante, como es bien sabido, en muchos otros fenómenos físicos.

Los lectores que puedan estar interesados en los aspectos matemáticos formales comentados y en la deducción de las ecuaciones y resultados citados, los encontrarán, con posterioridad a esta publicación en *La Voz*, en el blog de mi página web www.prubper.com ■

La bicicleta es un modo de transporte

ALFONSO PÉREZ ESTÉBANEZ
Colegiado n° 22.782

La afirmación es una obviedad, pero parece que en las últimas décadas se nos viene olvidando en este país que la bicicleta, además de un deporte maravilloso, es también un modo de transporte.

Actualmente estamos viviendo un intento por fomentar los medios de transporte más eficientes energéticamente y los más respetuosos con el medio ambiente. En ese sentido, se está potenciando el transporte ferroviario, el marítimo y el transporte por tubería, en detrimento del transporte por carretera y el aéreo. Pero qué hay de ese invento tan simple como revolucionario que es la bicicleta, ejemplo de sencillez y eficacia, de bajo coste y consumo nulo: la bicicleta permite multiplicar por 5 la capacidad motora del ser humano sin utilizar ninguna fuente de energía externa. Si tenemos en cuenta que en España la energía consumida por el sector transporte es algo más del 40% de la energía total (*Alfonso Sanz Alduán 2008*), y que el 50% de los desplazamientos urbanos en coche son viajes de menos de 3 km (*IDAE: Guía práctica de la energía, Consumo eficiente y responsable 2010*), se me antoja que merece la pena dedicarle al tema un momento para pensar.

Inventada en 1818 y mejorada hasta nuestros días, hoy la bicicleta es el medio de transporte de personas más utilizado en Asia, tanto en ciudades



La bicicleta permite transportar varias personas y mercancías ligeras, como ilustra esta fotografía tomada en High Street, Oxford, Reino Unido.

como en zonas rurales, especialmente en India y China. Su uso también es generalizado en centro y norte de Europa, en países como Holanda, Alemania, Suiza, Inglaterra o Polonia, donde la bicicleta juega un papel primordial y sin la cual otros medios de transporte urbano estarían saturados. En la actualidad se estima que hay unos 800 millones de bicicletas en el mundo.

España es uno de esos países en los que la bicicleta, tras tener su momento de protagonismo en la primera mitad del siglo XX, ha caído en el olvido y sólo nos acordamos de ella, si somos aficionados, cuando queremos hacer deporte o como forma de ocio. Muy pocas personas en este país piensan en ella como un medio efectivo para