

sanos. Pero somos incapaces de hacer nada. Sólo nos preocupa si somos zurdos o diestros, y pensamos que de ahí deriva nuestro mal. No se puede ser más insensato.

En cuanto a mi bagaje, dos carreras técnicas, cursando ADE por la UNED, formación complementaria y especialización en el último año debido a mi estatus de desempleado. Sigo con frustración. Opciones: cambiarme de país o reorientar mi trayectoria profesional.

¡Ole! He optado por esto último, admito los riesgos. Sigo formándome.

Se supone que yo he hecho lo que tenía que hacer. Se supone que he hecho los deberes. Se supone que las cosas tenían que salir de otro modo. Se suponía que España era un país moderno. Se supone que los países a nuestro alrededor han pasado la misma crisis. Se supone que cuanto más cualificado estés, más posibilidades tienes. Se supone... Ya no supongo nada. Spain is different. ■

Entretencimientos cuadrículares bi-, tri- y multidimensionales (I)

PABLO RUBIO PÉREZ
Colegiado nº 1.588

En el núm. 327 (junio 2009) de *La Voz del Colegiado* nuestro compañero Juan Francisco Martínez Cambroneiro, en su opinión *La Inducción*, planteaba el problema de la determinación del número de cuadrados que pueden dibujarse en una cuadrícula perfecta de dimensiones $n \times n$, siendo la solución obtenida mediante la aplicación de este método,

$$N(n) = \sum_{i=1}^n i^2, \text{ (I)}$$

habiendo demostrando previamente al efecto, y aplicando reiteradamente el método de inducción, la siguiente relación recursiva

$$N(n+1) - N(n) = (n+1)^2, N(1) = 1, \text{ (II)}$$

En el nº 330 (Octubre 2009), bajo el título *Inducción y Matemática justificativa*, obtuvimos la misma solución (I) por vía deductiva directa, con la explicación añadida, de que el sumando i^2 , que ocupa el lugar i en la suma, representa el número de cuadrados de dimensiones $(n-i+1) \times (n-i+1)$.

Por otro lado, la integración de la recurrencia (II), que resulta inmediata, da directamente la solución (I), lo que exime, inclusive, de la propia reiteración inductiva, como indicaba bien

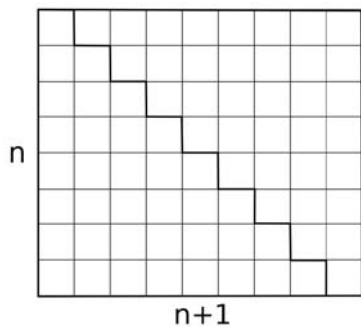
Emilio Recuenco en su comentario sobre esta cuestión en el nº 336 de *La Voz*, en el que razonaba igualmente la misma solución deductiva directa así como su explicación adicional, con una referencia a un extravío anterior de su publicación.

La solución (I) del número de cuadrados, además de la solución del número total de posibles rectángulos, que es de un orden superior, las daba ya Martin Gardner, aunque sin incluir las demostraciones, en su *Carnaval Matemático*, p. 124 (Ed. Alianza Editorial, S.A., 1980).

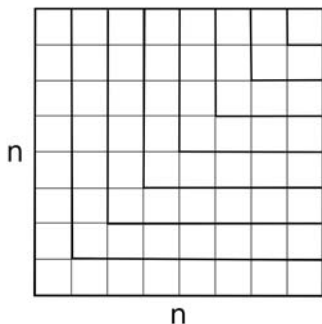
Como distracción del tedio de un viaje rutinario de jubilado, obligado por motivos personales, y repetido por la misma ruta del autobús urbano, en mitad del tráfico madrileño, y también como evasión de los problemas reales que todos llevamos a cuestas, ¡la vida!, meditaba en una justificación más expresiva de la anterior recurrencia (II), y consecuentemente de (I), que se obtiene, como veremos después, mediante una sencilla representación gráfica de la cuadrícula base bi-dimensional, origen de la cuestión planteada por nuestro compañero.

Anticipo la capacidad explicativa de estas soluciones gráficas directas, el conocido y manido *slogan* publicitario

sobre el valor de la imagen, traducido también en la máxima *cuanto más simple mejor*, y pongo como ejemplos introductorios previos, las demostraciones ingeniosas tradicionales de dos sumas polinómicas elementales, demostraciones que resultan ser, asimismo, de índole *cuadricular*.



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

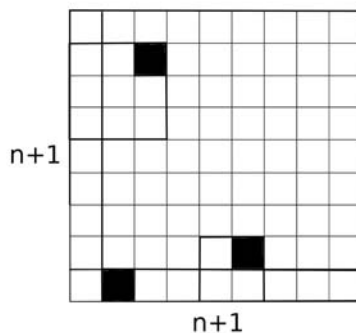


$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

La primera, a la que Juan Francisco aplicaba también el método de inducción, resulta de la descomposición simétrica (similar al *ying* y el *yang* chinos) de un rectángulo de dimensiones $n \times (n+1)$, solución pareja en sencillez, y si se considera la partición que aparece en cada una de las filas, prácticamente idéntica a la conocida solución dada por Gauss a esta suma, como contestación casi inmediata a su maestro, en sus años de escolar precoz, con la intuición de hacer previamente las sumas de cada dos sumandos equidistantes del centro, todas ellas con el resultado común $n+1$. La segunda representación, igualmente expresiva, es también inmediata a partir de la descomposición en bandas en ángulo recto, del cuadrado de dimensiones $n \times n$. Dos soluciones gráficas,

hoy clásicas, y presentes en textos de divulgación matemática.

Centrándonos ya en nuestro problema, dibujamos la siguiente gráfica explicativa, referida a dos ejes rectangulares. La cuadrícula básica construida sobre los ejes, que son también lados del cuadrado de dimensiones $(n+1) \times (n+1)$, incluye la cuadrícula auxiliar, de dimensiones $n \times n$, resultante de eliminar sus primera columna y última fila.



Un cuadrado elemental cualquiera, de lado 1, del básico, definido por las coordenadas (i,j) de su vértice superior derecho, lo haremos corresponder al cuadrado con el mismo vértice superior derecho, y de lado el valor $\min(i,j)$, que se dibuja en la cuadrícula principal y no en la auxiliar, por incluir uno o varios cuadrados de la primera, que no pertenecen a la segunda. Existe además una correspondencia biunívoca recíproca obvia entre el cuadrado elemental y el así dibujado. Así pues, puesto que el número total de cuadrados elementales es el segundo miembro de (II), la misma gráfica es, simplemente, *per se*, una prueba completa de (II).

Más aún, consideremos esta última gráfica dividida en $n+1$ bandas en ángulo recto en la misma forma representada en la figura anterior. La banda j ($1 \leq j \leq n+1$) se numera en el sentido de mayor a menor longitud de las bandas. El número de cuadrados elementales de la banda j es, pues, $2(n-j+1)+1$, cuyos cuadrados correspondientes, dibujados con el criterio indicado, tienen lado de longitud común j . Si $N(n+1, j)$ es el número total de cuadrados de lado j que pueden dibujarse en la cuadrícula básica, se cumple la recurrencia, análoga a (II):

$$N(h+1, j) - N(h, j) = 2(h-j+1)+1, n \geq h \geq j, N(j, j)=1, \text{ (III)}$$

cuya integración inmediata, aplicando la fórmula de la suma de la sucesión de números impares en la misma figura, da el resultado previsto $N(j, j) = (n-j+1)^2$ que justifica la interpretación señalada del sumando de lugar $i=n+1-j$ en (I). El compañero Martínez Cambronero podría reconocer aquí, inclusive, una síntesis simplificadora de su propia argumentación.

En nuestra opinión anterior, comentábamos también la superioridad de dos métodos operacionales distintos, sobre la aplicación de la inducción en el cálculo de sumas de términos polinómicos como es la solución (I) de este problema, y obligados en los casos de sumas aún más complejas y no exclusivamente polinómicas.

Como muestra ilustrativa formulamos una sencilla ampliación del problema planteado por Martínez Cambronero, preguntándonos por la superficie total de todos los cuadrados incluidos en (I). La solución es ahora directa con la información ya disponible. En efecto, teniendo en cuenta, de nuevo, el significado de cada sumando de (I), se tiene, como valor de esta superficie, la siguiente suma, algo menos simple que aquella

$$S(n) = 1^2 \times n^2 + 2^2 \times (n-1)^2 + \dots + (n-1)^2 \times 2^2 + n^2 \times 1^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 \times (n-i+1)^2.$$

Aquí ya no es conocida, ni es factible “adivinarla” a priori, una expresión sintética formal de la suma, que permitiera utilizar la inducción para su demostración ulterior. Por el contrario, el recurso a cualquiera de los dos métodos apuntados, el de diferencias finitas o la integración simbólica de Bernoulli, después de cálculos simples que no detallamos, conduce a la siguiente fórmula polinómica de $S(n)$, expresada en la forma descompuesta factorial más reducida, sin la utilización de los números imaginarios,

$$S(n) = \frac{1}{30} n(n+1)(n+2)[(n+1)^2 + 1].$$

En la 2ª parte de esta opinión, y confiando en que estas disgresiones lúdico-matemáticas puedan despertar algún interés, o, siquiera, curiosidad, profundizaremos aún más en ambas cuestiones, número y superficie total de cuadrados, y elevaremos también, algo más, su nivel matemático, hasta el momento poco sofisticado, presentando los que llamaremos entretenimientos reticulares multidimensionales de filiación cuadrangular.

En estas distracciones de mis viajes, creo yo, además, que Juan Francisco puede pasar de su humorada de despedida, sobre una hipotética condición cuadrículada mental. De momento, ya somos tres. ■

Poema

ANTONIO ANGULO ÁLVAREZ
Colegiado n° 425

Puede que falte, amor, puede que falte
puede que vaya amor, puede que vaya
puede que cambie el sayo por la malla
puede que ataque, amor, puede que
asalte.

Puede que llegue, amor, puede que
asalte
que salte, con que solo oiga la tralla.
Puede que pase, amor, pase la raya
y puede que tu amor me sobresalte.

Poder lo puedo todo si imagino
poder lo puedo todo si te evoco
si me aventuro, amor, por tu camino.

Impaciente lebrele que salta loco
es mi oficio cazar y es mi destino
buscar lo mucho para hallar lo poco. ■