

La Voz del COLEGIADO

nº 352 | Noviembre-Diciembre 2011

Esta publicación es el órgano de expresión de las opiniones y comentarios personales sobre temas colegiales y profesionales y brevemente sobre cualquier aspecto colegial. Los autores son los responsables únicos de las opiniones emitidas en sus escritos.

Condiciones técnicas de las comunicaciones remitidas a ‘La Voz del Colegiado’

- Su extensión no debe exceder de **dos folios** DIN A4 escritos a simple espacio en letra del cuerpo 12.
- El idioma empleado será el **español**.
- Serán publicadas según el **orden de recepción** en el Colegio y ajustándose a las disponibilidades de espacio establecido de la publicación, con criterio de oportunidad en la misma.
- Se evitará la publicación de más de **tres opiniones de un mismo colegiado dentro del mismo año natural**, con el objeto de propiciar el máximo número de aportaciones.
- Las comunicaciones vendrán obligatoriamente **suscritas por colegiados**, en plenitud de derechos y atribuciones, con su nombre, apellidos y números de colegiación.
- Los **temas de debate** se cerrarán en un **máximo de tres números**, advirtiéndose en el segundo número que el asunto se cerrará en la siguiente publicación.
- El Comité de Redacción analizará los artículos recibidos **hasta el día 5 de cada mes** y comunicará a los autores los artículos a publicar.

Opiniones

Entretenimientos cuadriculares bi-, tri- y multidimensionales (II)

PABLO RUBIO PÉREZ
Colegiado nº 1.588

Recordamos, como origen de esta opinión, el problema planteado por el colegiado Juan Francisco Martínez Cambroner (‘La Inducción’, *La Voz*, nº327, junio 2009): la determinación del número de cuadrados que pueden dibujarse en una cuadrícula de dimensiones $n \times n$.

En una opinión anterior (*La Voz*, nº 330, octubre de 2009) y en la 1ª parte publicada con este mismo título (*La Voz*, nº 350, septiembre de 2011), hemos tomado el testigo con elucubraciones sobre esta misma cuestión bidimensional, presentadas como ‘Entretenimientos cuadriculares’, pues, como comentaba en esa 1ª parte, me habrían servido de evasión durante viajes tediosos obligados de jubilado, atravesando Madrid.

En recorridos sucesivos, también como distracción y evasión, hemos

seguido meditando y profundizando en una extensión multidimensional similar del problema, primero en el espacio tridimensional, el caso *cubicular*, esto es, para un entramado cúbico de dimensiones $n \times n \times n$, y, generalizando el problema, en cualquier espacio p -dimensional, E_p , para dimensiones $p > 3$.

Una observación previa es el uso polisémico trópico, ¡una sinécdoque!, que hacemos del término *dimensión* en un doble sentido: como indicativo de la entidad del espacio (*continente*) de referencia, bi-, tri-, o p -dimensional, definido por un sistema de coordenadas ortonormal (espacio euclídeo), o como medición o longitud (*contenido*) de un elemento unidimensional, en nuestro caso, una arista cualquiera del hiperpoliedro o elemento base p -dimensional, al que se refiere el problema.

Nuestro elemento base será ahora, en efecto, un hipercubo de dimensión espacial p , y dimensiones lineales $n \times n \times \dots \times n$ (p factores), en adelante, también, un p -cubo, que en el lenguaje matemático actual es un politopo particular regular, cuyos elementos frontera de una determinada dimensión, son todos iguales y de filiación el cuadrado. Además, ambos números, p y n , son independientes entre sí, correspondiendo, cada uno de ellos, a cada una de las dos acepciones de la palabra dimensión según nuestro comentario anterior.

Prescindiremos de una justificación formal de la posibilidad y/o de la construcción ideal del politopo p -cúbico, así como de la definición de las principales propiedades de un p -cubo, que definen bien la abstracción geométrica de este politopo concreto, lo que excedería el objeto limitado de esta opinión, aunque todas ellas resultan fácilmente comprensibles de forma intuitiva, y son de utilidad en nuestra deducción posterior. Los lectores más interesados en estas cuestiones matemáticas, incluida una ampliación del problema con la consideración de una retícula y/o elementos de filiación el rectángulo, lo que implica mayor generalidad que la base cuadrada, pueden seguirlas en el *blog* de la página *web* personal: www.prubper.com

La cuestión que tratamos aquí es la determinación del número total de p -cubos con aristas de dimensión, o sea de longitud i , que pueden configurarse en el p -cubo genérico descrito, para todos los valores posibles de i ($\forall i, 1 \leq i \leq n$), considerándolo, ya, subdividido, como decimos, en la retícula de n^p p -cubos elementales, en el espacio de p dimensiones.

La solución del problema formulado se obtiene mediante aplicación del mismo método traslacional que utilizamos en nuestra demostración de la solución (I) en el n° 330 de *La Voz*, de comprensión intuitiva, igualmente sencilla.

Se facilita la visualización de la demostración, analizando, primero, el

caso de un cubo de dimensiones $n \times n \times n$ en el espacio tridimensional. Expresada esta demostración, de manera más sintética que la formulada para el cuadrado en el citado número 330 de *La Voz*, allí en un sentido didáctico, ahora ya superfluo, consideremos un cubo cualquiera de dimensiones $i \times i \times i$, incluido en el cubo total. Todos los cubos iguales son generados mediante traslaciones sucesivas del anterior en las direcciones de los tres ejes coordenados, siendo el número de posiciones posibles en cada una de estas tres direcciones $n - i + 1$, y el número de cubos resulta

$$(n - i + 1) \times (n - i + 1) \times (n - i + 1) = (n - i + 1)^3,$$

debiendo efectuarse después la suma para todos los valores de i , $1 \leq i \leq n$.

La misma argumentación se generaliza análogamente en el caso p -dimensional en un razonamiento más abstracto, pero no más difícil de formular, teniendo en cuenta la generación y propiedades de un p -cubo cualquiera, en particular la relativa al paralelismo de elementos, obteniéndose en definitiva la fórmula generalizada

$$N(n, p) = 1^p + 2^p + \dots + n^p,$$

donde el sumando de lugar i , i^p , es, nuevamente, como en los casos bi y tri-dimensional, el número de p -cubos con aristas de dimensión $n - i + 1$.

Se obtienen las dos expresiones distintas siguientes de esta suma, cada una con $p + 1$ sumandos frente a los n sumandos de la suma inicial, aplicando ambos métodos apuntados en nuestra primera comunicación, y utilizados ya, en la primera parte de esta segunda, en la deducción de una fórmula sintética para el cálculo de la superficie total de todos los cuadrados con $p = 2$.

Primero, por las propiedades del cálculo de diferencias finitas

$$N(n, p) = \binom{n}{1} + \sum_{h=1}^{h=p} \binom{n}{h+1} \Delta^h 1^p, \quad (I)$$

y, segundo, mediante la integración simbólica en números de Bernouilli

$$N(n, p) = \frac{1}{p+1} \left[n^{p+1} + \sum_{h=1}^{h=p} \binom{p+1}{h} B_h n^{p-h+1} \right]. \quad (\text{II})$$

Cualquiera de estas expresiones, en el caso cúbico, $p=3$, da la solución sintética muy conocida

$$N(n, 3) = \sum_{i=1}^{i=3} i^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2.$$

Para valores $p \geq n$ tiene ventaja la segunda expresión que da directamente su ordenación potencial polinómica, además de la reducción sensible del número de sumandos que supone la propiedad siguiente de los números de Bernouilli: $B_{2i+1}=0, i>0$. Para valores $n \gg p$, el potencial operativo de la fórmula (II) es muy superior al de la fórmula (I), por las dos razones anteriores y por la mayor simplicidad de sus respectivos números combinatorios.

Como información de erudición anecdótica, ilustrativa de esta superioridad, añadiremos también aquí, el siguiente cómputo rápido, que realizó, presuntuosamente, el mayor de los hermanos Bernouilli, Jacob (1.654-1.705), matemático genial, y también soberbio, ¡en menos de 10 minutos y sin necesidad de ninguna moderna computadora!, mediante aplicación de su propio método reflejado en la última fórmula anterior,

$$\begin{aligned} 1^{10} + 2^{10} + \dots + 1000^{10} = \\ = 91.409.924.241.424.243.424.241. \\ 924.242.500, \end{aligned}$$

dejando en simple intento voluntarioso, el denodado esfuerzo anterior de Ismael Bullialdus, para el cálculo de la suma de, sólo, las seis primeras potencias.

Puede plantearse, asimismo, una extensión del problema, aplicada a volúmenes, similar a la resuelta sobre áreas en la 1ª parte de esta opinión. Esto es, la determinación de la fórmula más simple del volumen total de todos los cubos que pueden formarse en una retícula cúbica.

En principio, habría yo pensado animar a la obtención de esta fórmula al lector interesado valeroso que disponga de todo su tiempo, sin otra ocupación más atrayente. Sin embargo, puesto que esta circunstancia requerida resultaría, con toda probabilidad, más que difícil, casi imposible, he resuelto también esta segunda cuestión, después de un sencillo, aunque farragoso, cálculo numérico, que da el resultado siguiente, expresado, como en el caso cuadrangular, en la forma factorial más reducida sin el empleo de coeficientes irracionales ni imaginarios,

$$\begin{aligned} V(n, 3) &= \sum_{i=1}^{i=n} i^3 (n+1-i)^3 = \\ &= \frac{1}{420} \times n(n+1)(n+2)[3(n+1)^4 \\ &\quad + 3(n+1)^2 + 10] \end{aligned}$$

La obtención de esta fórmula de grado 7, cuya estructura factorial ha resultado muy similar a su paralela de grado 5 en la 1ª parte anterior, ha requerido, eso sí, además del uso de (II), alguna astucia inicial para la optimización del esquema de cálculo, y final, para la obtención de la descomposición factorial. La misma expresión podría haberse obtenido también con un programa específico. Aunque, ciertamente, tal desarrollo informático tendría justificación única que sepamos, si planteado como eventual ejercicio propuesto, en un entorno docente. ■