

La Voz del COLEGIADO

n° 355 | Marzo 2012

Esta publicación es el órgano de expresión de las opiniones y comentarios personales sobre temas colegiales y profesionales y brevemente sobre cualquier aspecto colegial. Los autores son los responsables únicos de las opiniones emitidas en sus escritos.

Condiciones técnicas de las comunicaciones remitidas a ‘La Voz del Colegiado’

- Su extensión no debe exceder de **dos folios** DIN A4 escritos a simple espacio en letra del cuerpo 12.
- El idioma empleado será el **español**.
- Serán publicadas según el **orden de recepción** en el Colegio y ajustándose a las disponibilidades de espacio establecido de la publicación, con criterio de oportunidad en la misma.
- Se evitará la publicación de más de **tres opiniones de un mismo colegiado dentro del mismo año natural**, con el objeto de propiciar el máximo número de aportaciones.
- Las comunicaciones vendrán obligatoriamente **suscritas por colegiados**, en plenitud de derechos y atribuciones, con su nombre, apellidos y números de colegiación.
- Los **temas de debate** se cerrarán en un **máximo de tres números**, advirtiéndose en el segundo número que el asunto se cerrará en la siguiente publicación.
- El Comité de Redacción analizará los artículos recibidos **hasta el día 5 de cada mes** y comunicará a los autores los artículos a publicar.

Opiniones

La magia del tres

PABLO RUBIO PÉREZ
Colegiado n° 1.588

Entre la serie homogénea de los números naturales, 1,2,3,..., existen enteros más significativos, por haber sido objeto, desde el comienzo de su utilización en las primeras culturas como meros instrumentos contables, de atribuciones que han trascendido la pura racionalidad matemática del intelecto, para inscribirse en otros terrenos más propios de la conciencia humana en el ámbito espiritual, así el simbolismo, la religiosidad o la magia. Son ejemplos, los temibles el 7 y el 13, el primero reivindicado y hasta sacralizado después por los hebreos, o el satánico 666, y como contrapunto principal, el más sagrado de los números entre los antiguos, el número **tres**, al que se han venido asignando virtudes y creencias místicas como base de perfección. Platón y después Aristóteles, lo consideraron como símbolo de la armonía suprema en cuanto a síntesis

de las tres componentes de la naturaleza humana, la material, la intelectual y la espiritual. Tres palabras representativas en tal concepción, terna, triada y trinidad, tienen resonancias en la historia de la humanidad que han venido subrayando la condición totémica del tres en el triple aspecto, cultural, político y religioso, a lo largo de las distintas civilizaciones hasta nuestros días.

Existe amplitud de referencias literarias y de manifestaciones artísticas de todo tipo sobre esta cuestión, cuya consideración no será, sin embargo, el objetivo central de nuestra opinión.

Por su cercanía temporal y ser, además, creación de nuestro propio entorno cultural, y, sobre todo, por la razón coyuntural que comento después, hago aquí única referencia al artículo “El número tres” (*El País*, 12-01-1992) del ilustre memorialista, ensayista y editor D. José Ortega Spottorno, antiguo

Director de la Revista de Occidente, en el que se describe una diversidad de situaciones míticas o reales, en muy distintos planos y épocas, cuyo eje central es, en todas ellas, la presencia cabalística del número tres.

En su artículo, el autor, prestando tributo a una afición matemática no abandonada, consecuente a su titulación de ingeniero agrónomo, afin a la nuestra, hacía referencia a las propiedades bien conocidas del círculo de los nueve puntos de un triángulo, que están igualmente relacionadas con la singularidad del número tres aludida.

Y es ésta, como digo, una justificación principal de mi comentario, dedicado en adelante a la presentación de otras propiedades del mismo círculo, algo más sofisticadas, y aún más vinculadas al mismo número tres, por la existencia de otros dos círculos con propiedades proyectivas análogas. Traslado ya, pues, mi exposición al terreno concreto de la geometría del triángulo, tema específico no tan sugerente sin duda como las anteriores menciones introductorias para los no iniciados en esta disciplina, aunque también más relacionado con nuestra propia formación matemática.

Es sobradamente conocido que el citado círculo, llamado de Euler-Feuerbach, contiene las tres ternas formadas por los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices del triángulo, todos ellos relativos a los dos puntos básicos, el centro de gravedad y el ortocentro. En realidad el número de incidencias de esta circunferencia con puntos asociados a construcciones elementales es $3 \times 2 \times 2 = 12$, si se integra la terna de las segundas intersecciones de cada mediana, definido cada punto por una razón doble de valor $1/2$, aunque prescindimos aquí de su consideración detallada.

Por nuestra parte nos hemos planteado, además, el problema siguiente:

¿Existe alguna otra pareja de otros dos puntos básicos, paralela a la formada por

el centro de gravedad G y el ortocentro H , tal que las seis proyecciones lineales de estos puntos desde los vértices sobre cada lado opuesto del triángulo, sean seis puntos concíclicos?

La respuesta es positiva y abre caminos de investigación novedosos que conducen a una multiplicidad de propiedades adicionales de la figura triangular, en sí, la más fiel representación icónica del número tres. Sin tratar de sobrepasar el espacio puesto a nuestra disposición, nos limitamos aquí a la simple mención de las más significativas.

Existen otros dos pares de puntos imaginarios (P, P') y (Q, Q') que generan propiedades proyectivas simétricas y paralelas a las del par real (G, H). La distinción entre la naturaleza real/imaginaria de puntos no tiene significación proyectiva.

Los dos círculos descritos, C_2 y C_3 , incidentes con los seis puntos pedales de cada par (P, P'), (Q, Q'), mantienen la misma relación simétrica con el círculo tradicional de los 9 (o 12) puntos, que llamamos C_1 . Las otras dos ternas de puntos adicionales geométricamente bien determinados, hasta completar el número 12, son las segundas intersecciones de las rectas de unión de cada par con los vértices y se construyen mediante homologías, de cuya definición eximimos, por razón de brevedad, al lector.

Las rectas PP' y QQ' son normales a la recta GH ; ambas son reales/imaginarias si el triángulo es acutángulo/obtusángulo, y en cualquier caso detentan la simetría apuntada con la recta GH . Pueden considerarse por tanto como la segunda y tercera rectas de Euler del triángulo. El triángulo con un vértice impropio que definen estas tres rectas, es otro elemento central singular que es autopolar, como también el triángulo dado, respecto de una circunferencia de centro H , a la que llamamos la circunferencia autopolar, con la notación C_H .

Las tres circunferencias C_1, C_2 y C_3 , son miembros del haz definido por la

circunferencia circunscrita al triángulo y C_H . La línea común de los centros es la recta GH, y el eje radical es el eje órtico del triángulo, paralelo a PP' y QQ'. Los centros de los círculos C_2 y C_3 , en la recta GH son respectivamente reales/imaginarios si el triángulo es acutángulo/obtusángulo, y viceversa para los dos puntos comunes de todos los círculos del haz sobre el eje radical.

Si R es el radio del círculo circunscrito, el radio de C_1 , es $R_1=R/2$ y los cuadrados de los radios R_2, R_3 de los círculos C_2 y C_3 , tienen valores

$$R_{2,3}^2 = 16.(1 \pm \sqrt{k})^{-3} R^2,$$

$$\text{con } k = \frac{\cos A \cos B \cos C + 1}{\cos A \cos B \cos C}.$$

Si el triángulo es acutángulo, el círculo C_2 es real y el círculo C_3 es imaginario, y si es obtusángulo, los dos son imaginarios. Se cumple, además, la siguiente relación simétrica de la terna (R_1^2, R_2^2, R_3^2) :

$$R_1^2 R_2^2 R_3^2 = (R_H^2)^3.$$

Diremos, finalmente, sin ir más allá, que propiedades genéricas del triángulo como son la recta y el círculo de Euler o el haz de circunferencias definido por las dos circunferencias circunscrita y autopolar se generalizan en espacios superiores de cualquier dimensión, aplicadas a un *simplex ortocéntrico n-dimensional* de $n + 1$ vértices,

con $n \geq 3$, pero la existencia de una triple simetría proyectiva de la recta y el círculo, sintetizada en la existencia de las tres rectas GH, PP', QQ' y los tres círculos C_1, C_2 y C_3 , es **exclusiva** del triángulo plano. Esta singularidad tiene la explicación matemática de que el número tres es la única solución natural en la relación $C(n,2) = n$, siendo $C(n,2)$ el número combinatorio de índices n y 2, y aquí pudiera interpretarse como un signo más de las presuntas connotaciones mágicas, o siquiera esotéricas, que comentamos.

Los posibles lectores interesados en los desarrollos geométrico-teóricos expuestos, pueden encontrar las explicaciones pertinentes, incluida la representación gráfica de las construcciones geométricas de las líneas y puntos descritos, en el Capítulo III: Triple Geometría Dual Involutiva del Triángulo del siguiente texto que he publicado recientemente como *ebook* en Bubok: <http://www.bubok.es/libros/211306/geometria-dual-involutiva-en-espacios-multidimensionales>

La descarga, que fija el autor es gratuita, y el precio del libro impreso en papel, a pedido, es de 13,83+0 €, que han sido las participaciones respectivamente fijadas por la editorial Bubok y por el autor. El mismo enlace y una síntesis del texto figuran también en www.prubper.com con un comentario en el *blog* relativo a la génesis y antecedentes de esta publicación. ■