

Algunas precisiones sobre pares y ternas de pares asociados de triángulos cevianos concíclicos

PABLO RUBIO PÉREZ
Colegiado n° 1.588

En recuerdo de Miguel Ángel Hacar y Ángel del Campo, impulsores y moderadores de las Tertulias de Geometría de la Akademia Neoplatónica P.M., de las que nos han quedado las crónicas redactadas por M.A. Hacar bajo el seudónimo de Kronícrates e ilustradas por A. del Campo, con la firma AC, publicadas en su momento en La Voz (Núms.173-195), en la confianza de que hubieran dispensado su gustosa acogida a estas nuevas disquisiciones geométricas.

En la anterior opinión, “La magia del tres” (*La Voz*, n° 355, marzo 2012), me planteaba, como problema, la siguiente pregunta, destacada en cursiva en el texto final publicado, por la propia coordinación de *La Voz*, con criterio acertado, por ser esta cuestión un elemento representativo principal de mi exposición:

¿Existe alguna otra pareja de otros dos puntos básicos, paralela a la formada por el centro de gravedad G y el ortocentro H , tal que las seis proyecciones lineales de estos puntos desde los vértices sobre cada lado opuesto del triángulo, sean seis puntos concíclicos?

La contestación afirmativa que allí hacía, referida además a las dos únicas soluciones particulares relacionadas con los dos puntos básicos G y H , en el contexto de la triple simetría dual, como objetivo central de aquella opinión, pudiera, por el contrario, haber inducido a confusión al lector en el equívoco de una falsa unicidad de la solución de este problema, si fuera considerado en el contexto más amplio de la geometría global del triángulo.

Las precisiones que aquí se establecen constituyen, por ello, la exposición generalizada de una respuesta más extensa, y más completa también, a la pregunta formulada anterior.

Prescindiré de las demostraciones y expresiones algébricas, algo sofisticadas, y me limito, en esta opinión complementaria, a la descripción de las conclusiones y resultados más significativos. Los lectores interesados encontrarán un comentario y el enlace con el desarrollo geométrico-algébrico puro sobre una

solución ahora integral de este tema, en el blog de www.prubper.com

En primer lugar, como es bien sabido, llamamos triángulos cevianos, con relación a un triángulo de referencia dado, ABC , a triángulos inscritos cuyos vértices son las proyecciones lineales (mediante cevianas) de un punto arbitrario, con exclusión de los puntos A, B y C , desde cada uno de estos tres vértices sobre el lado opuesto correspondiente.

La mencionada solución integral del problema planteado, olvidando la dependencia allí establecida de los dos puntos básicos G y H , tiene la siguiente expresión más general: existen infinitas soluciones de dos triángulos cevianos concíclicos, pudiendo definirse cada una de ellas a partir de un punto cualquiera del plano y su propio triángulo ceviano, con exclusión de nuevo de los vértices del triángulo base. La cuestión a resolver es, así, la determinación del punto generador del segundo triángulo ceviano concíclico con el primero.

La clave para su resolución se expresa en el teorema siguiente: las segundas intersecciones de cada lado BC, CA, AB con cualquier cónica incidente con los vértices de un triángulo ceviano, son también los vértices de un segundo triángulo ceviano.

Puesto que una cónica está definida por cinco puntos, resulta también, de forma más limitada: las cónicas con dos puntos comunes, no situados en los lados del triángulo base, incidentes con los vértices de un triángulo ceviano, cortan de nuevo a los lados BC, CA, AB en vértices de un triángulo ceviano.

Y bastará elegir los dos puntos cíclicos impropios del plano para que una circunferencia cualquiera circunscrita al primer triángulo ceviano, que supongamos conocido, determine un segundo triángulo ceviano, también inscrito en la circunferencia, asociado al primero.

En cuanto a la relación entre los dos puntos generadores de los dos triángulos asociados cevianos concíclicos, se deducen por la vía algebraica las propiedades siguientes:

- Dos puntos, P y P' , así relacionados se corresponden en una transformación involutiva de grado cuatro, T , aunque esta naturaleza cuártica no impide que exista entre ambos puntos una correspondencia biunívoca, esto es, de un punto a un sólo punto, y simétrica, es decir, del segundo también solamente al primero.
- Los puntos dobles de T , para los cuales los dos triángulos cevianos del enunciado son coincidentes, son obviamente el punto de Gergonne, Γ , y sus tres adjuntos, Γ_a , Γ_b , Γ_c , del triángulo ABC , cuyos vértices cevianos son los puntos de contacto de las circunferencias inscrita y exinscritas del triángulo base. Estas cuatro circunferencias y el círculo de los nueve puntos son, en efecto, las soluciones inmediatas más manifiestas del problema planteado inicial. Las ecuaciones de los puntos dobles de T se verifican, además, para los vértices A, B y C , cuyos respectivos triángulos cevianos, que admiten elecciones múltiples, pueden considerarse degenerados. Las circunferencias correspondientes se descomponen en el producto de las dos rectas isotropas respectivamente incidentes con cada vértice considerado, A, B o C .
- La citada transformación T , tal que $P=TP'$, y recíprocamente $P'=TP$, es el producto simétrico, $T=T_1T_2T_3$, de tres transformaciones cuadráticas en el orden que se menciona, con las siguientes definiciones de cada factor T_1 y T_2 :

1. T_1 es una inversión triangular referida al triángulo ABC , de puntos dobles el incentro I y los tres exincentros $I_1, I_2,$

I_3 . El triángulo de referencia ABC es, como corresponde a esta definición, el triángulo diagonal del cuadrángulo I, I_1, I_2, I_3 . Los cuatro puntos I, I_1, I_2, I_3 constituyen un conjunto de puntos armónicamente asociados con relación al triángulo ABC .

2. T_2 es una transformación cuadrática involutiva referida al triángulo cuyos lados son las tangentes en A, B , y C a la circunferencia circunscrita al triángulo, cuyos cuatro puntos dobles, $D=T_1(\Gamma)$, $D_a=T_1(\Gamma_a)$, $D_b=T_1(\Gamma_b)$, $D_c=T_1(\Gamma_c)$, son los inversos triangulares en el triángulo ABC , de los puntos $\Gamma, \Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$. Los vértices del triángulo de referencia en la transformación T_2 , como decimos, intersecciones de cada par de tangentes al círculo circunscrito al triángulo ABC , son, pues, los tres puntos armónicamente asociados al punto de Lemoine, L , en el triángulo ABC , que llamamos L_1, L_2, L_3 . El triángulo $L_1L_2L_3$ es, igualmente, el triángulo diagonal del cuadrángulo de vértices D, D_a, D_b, D_c .

- La condición involutiva de T_1 y T_2 , expresada como $T_1=T_1^{-1}$, $T_2=T_2^{-1}$, o bien $T_1T_1=I$, $T_2T_2=I$, siendo I la transformación idéntica, garantiza la condición simétrica involutiva de T , cumpliéndose igualmente $T=T^{-1}$, o bien $TT=I$.

En el contexto de la triple simetría dual, tratado en la opinión anterior, cada par individual de dos puntos generadores de dos triángulos cevianos concíclicos, distinto del par (G, H) , estará asociado a otros dos pares de puntos con comportamientos proyectivos simétricos. Ello supone que cada par estará asociado a una cónica circunscrita a los dos triángulos cevianos de los puntos del par, la cual será un miembro del haz de cónicas definido por la circunferencia solución y la cónica degenerada producto de las rectas armónicas asociadas a cada punto del par solución inicial. Pero, **a diferencia de la elección del par (G, H)** estas dos cónicas que completan la terna, **no son ya circunferencias**. La única circunferencia de este

haz de cónicas es la correspondiente al par inicial de los dos puntos generadores del haz.

Recíprocamente, la única solución de una terna de circunferencias solución simétricamente asociadas, es decir pertenecientes las tres al haz definido por una circunferencia solución y las rectas armónicas asociadas a cada punto del par generador de la misma, fue la presentada en la opinión anterior en la que se obtenía un haz de circunferencias de eje radical el eje órtico del triángulo. En esta circunstancia estuvo basada nuestra respuesta relativa a la unicidad de las otras dos circunferencias solución que, con el círculo de Euler-Feuerbach, integraban la terna. Las principales propiedades geométricas características de esta terna se describían también en aquella opinión.

Finalmente, por supuesto cualquier otra circunferencia con dos triángulos

cevianos inscritos, diferente del círculo de los nueve puntos y de sus dos circunferencias asociadas, tendrá como asociadas propias otras dos cónicas, ¡que no son ya circunferencias!, pues no pertenecerán al mismo haz anterior de circunferencias, el generado por los puntos *G* y *H*, sino al propio haz de cónicas generado por la circunferencia elegida. La única circunferencia en este nuevo haz, será, precisamente, de nuevo, la propia circunferencia seleccionada. Así, por ejemplo, el haz generado por la circunferencia inscrita en el triángulo *ABC*, que verifica una doble incidencia con cada vértice de un único triángulo ceviano, es un haz de cónicas bitangentes en los puntos intersección de la circunferencia inscrita con la recta armónica asociada al punto de Gergonne Γ , siendo, efectivamente, la inscrita, la única circunferencia del haz. ■

Errores en las rotondas

MANUEL MATEOS DE VICENTE
Colegiado n° 2.593

He estado observando un par de rotondas en los últimos meses tratando de averiguar si se pueden eliminar o disminuir los atascos.

El primer error es semántico pues en realidad deberíamos llamarlas glorietas.

Una de las glorietas es muy amplia y alargada con una longitud de unos 100 m. Los conductores que están esperando incorporarse a la glorieta entran enseguida cuando los vehículos circulan a menos de 40 km/hora pero no lo hacen si circulan a 60 o 70 km/hora, como es corriente; si se pusieran lomos para que los coches que entran no fueran tan deprisa se podría aumentar la capacidad al doble. Como hay una gran distancia en esta glorieta entre unas entradas y la salida más próxima se debería construir bordillos de poca altura, para hacer un carril independiente que canalizara los coches de entrada en

unos 30 a 50 metros dependiendo de cada entrada; entonces el tráfico entrante puede ser el triple o más que sin canalizar tal entrada. Algunos coches que hacen un recorrido de 270° van siempre por el carril exterior; según parece esto lo recomiendan las escuelas de conducir; la canalización de las entradas ayudaría a que estos coches fueran por un carril interior pues actualmente los tres carriles que tiene la glorieta equivalen a tener un solo carril.

En la otra glorieta que es de tipo corriente, circular, se aumentaría la capacidad haciendo que los coches no sobrepasaran los 40 km/hora construyendo lomos. En dos de las entradas sería muy eficaz canalizar los coches alargando el carril de entrada unos 20 metros.

Conviene que se lleven a la práctica estas sugerencias a nivel nacional pues el beneficio supera en muchas veces el coste. ■