



Colegio de
Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos

VOZ

DEL COLEGIADO

Esta publicación es el órgano de expresión de las opiniones y comentarios personales sobre temas colegiales y profesionales y sobre cualquier aspecto colegial.

Los autores son los responsables únicos de las opiniones emitidas en sus escritos.

Condiciones técnicas de las comunicaciones remitidas a 'La Voz del Colegiado'

- Su extensión no debe exceder de dos folios DIN A4 escritos a simple espacio en letra del cuerpo 12.
- El idioma empleado será el castellano.
- Serán publicadas según el orden de recepción en el Colegio y ajustándose a las disponibilidades de espacio.
- Se evitará la publicación de más de tres opiniones de un mismo colegiado dentro del mismo año natural, con el objeto de facilitar el máximo número de aportaciones a 'La Voz del Colegiado'.
- Los temas de debate se cerrarán en un máximo de tres números, advirtiéndose en el segundo número que el asunto cerrará en la siguiente publicación.

OPINIONES

Aplicación tridimensional a la deducción de una generalización triangular pitagórica

por Pablo Rubio Pérez

Colegiado nº 1.588

"La Geometría es el conocimiento de lo eternamente existente" (Platón).

En una opinión anterior, 'El Pitágoras Multidimensional' (La Voz del Colegiado, julio 2010, nº 333) se presentó una generalización de la fórmula pitagórica clásica, relativa a un triángulo rectángulo en el plano, aplicada a un simplex de dimensión m , situado en un espacio n -dimensional con $m < n$, definido el hiperespacio, por un sistema coordenado ortonormal, y se obtuvo una relación cuasi pitagórica entre hipervolumenes, considerando las proyecciones de este elemento geométrico sobre todos los subespacios coordenados de dimensión común h , extendida a todos los valores $h=m$ y, también, $m < h < n$. El caso particular más simple, correspondiente a $h=m=n-1$, se traduce en la generalización, ésta pitagórica, que iguala el cuadrado del

hipervolumen del m -simplex a la suma de cuadrados de los hipervolumenes proyección sobre subespacios de dimensión $n-1$.

La formulación en el plano, esto es, con $n=2$, $h=m=1$, tiene una única expresión, que representa la propia fórmula tradicional de Pitágoras, relativa a las proyecciones de un elemento lineal (hipotenusa), equivalente al m -simplex en el planteamiento generalizado, sobre dos ejes ortogonales (catetos), siendo así,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2. \quad (I)$$

La citada fórmula pitagórica clásica se refiere, por tanto, a un triángulo rectángulo, en concreto. Otras tres expresiones más generales, relativas a un triángulo cualquiera, que se estudian en la geometría elemental, tienen la conocida

forma, además de las otras dos similares, resultantes de la permutación circular de los vértices,

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{BA} \cdot \overline{CA} \cos A. \quad (II)$$

Nuestro comentario trata de la obtención de otras tres expresiones métricas triangulares distintas, que mantienen la forma tradicional pitagórica (I), y que pueden considerarse, asimismo, generalizaciones adecuadas de esta misma expresión (I), por ser también aplicables, como las (II), a un triángulo cualquiera genérico.

Por la razón que explicaremos más adelante se utilizará una vía de deducción tridimensional, considerando el triángulo base ABC como sección de un triedro trirrectángulo, que define un sistema de coordenadas ortonormal. Las coordenadas de los vértices se escriben A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c), y la ecuación del plano del triángulo ABC resulta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

El vértice del triedro y también origen de coordenadas, V, se proyecta sobre el plano ABC en el ortocentro H del triángulo, y un punto cualquiera de la recta VH define, con el triángulo ABC como base, un tetraedro ortocéntrico. Es conocida la propiedad de un tal tetraedro relativa a la igualdad de las sumas de los cuadrados de las longitudes de cada par de aristas opuestas. En particular, los cuatro vértices A,B,C y H, determinan un tetraedro degenerado (plano) para el cual se sigue manteniendo la propiedad indicada, esto es,

$$\overline{HA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{AB}^2 = S. \quad (III)$$

Tendrá también interés la obtención de una expresión, aún más explícita, del valor común de estas tres sumas, S. En primer lugar, refiriéndonos ahora al triedro trirrectángulo (V,ABC), la suma de los tres primeros miembros en (III) da el resultado

$$\begin{aligned} 3S &= (\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2) + (\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2) = \\ &= 3(\overline{VA}^2 + \overline{VB}^2 + \overline{VC}^2 - \overline{VH}^2) = 3(d^2 - \overline{VH}^2), \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ \overline{VH}^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \end{cases}$$

En segundo lugar, el centro O de la esfera circunscrita al tetraedro VABC tiene coordenadas O(a/2,b/2,c/2), luego las dos expresiones anteriores representan, respectivamente, el cuadrado del radio OV = OA,OB,OC de esta esfera y el cuadrado de la distancia OH del centro O al plano ABC, multiplicados, además, ambos cuadrados por 4, y, por tanto, el cuadrado del radio R del círculo circunscrito al triángulo ABC, ya en su plano, resulta

$$R^2 = \overline{OV}^2 - \overline{OH}^2 = \frac{1}{4}(d^2 - \overline{VH}^2) = \frac{1}{4}S. \quad (IV)$$

Las relaciones (III) son, en definitiva, en una formulación más precisa (Fig. 1),

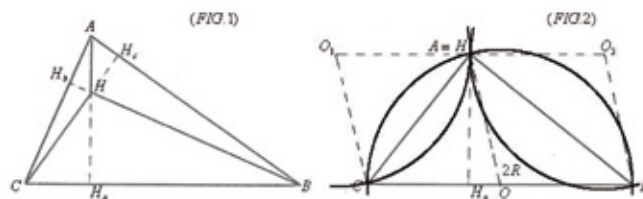
$$\overline{HA}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{AB}^2 = 4R^2. \quad (V)$$

El conjunto (V) de igualdades es simétrico respecto del conjunto de puntos (H,A,B,C) y se satisface indistintamente para los cuatro triángulos ABC, HBC, HCA y HAB, cuyos ortocentros respectivos son H, A, B y C, mientras R es el valor común de los radios de los cuatro círculos circunscritos.

Si el ortocentro H coincide, por ejemplo, con el vértice A, el triángulo ABC es rectángulo, y las relaciones (III) adquieren la forma simplificada,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 4R^2,$$

que se identifica con la fórmula clásica (I), incluida, además ya, la precisión añadida por (V). Los dos triángulos ABC y HBC son también coincidentes, y los triángulos HCA y HAB degeneran en los lados AC y AB, con un tercer vértice A, común, duplicado. Los círculos circunscritos virtuales, del mismo radio R, respectivamente incidentes con los vértices B y C, son tangentes en A, y la tangente común es la altura AH del triángulo ABC, sobre la cual se produce la identificación en el límite de A y de H (Fig. 2).



En resumen, las expresiones (V) pueden considerarse ciertamente una generalización de la fórmula pitagórica clásica (I), referidas a un triángulo cualquiera genérico.

Es cierto que el procedimiento seguido incurre en la, así denominada por los lógicos, petición de principio, ya que la fórmula pitagórica clásica (I) ha sido utilizada en el curso del propio proceso deductivo, por ejemplo en (IV), aunque ello no invalida la anterior conclusión (V). Por supuesto las mismas expresiones (V) se obtienen más simplemente mediante su deducción directa en el plano, acudiendo al recurso de la trigonometría plana, que da las dos relaciones sencillas, cuyo detalle, implícito en las deducciones anteriores, obviaremos por brevedad

$$\begin{cases} \overline{AB} = 2R \operatorname{sen} A \\ \overline{HA} = 2R \cos A. \end{cases}$$

Sin embargo, hemos preferido la vía tridimensional, en principio más complicada, por la razón importante, sugerida al principio de esta opinión, de que la formulación (V) y el procedimiento aplicado, son extensibles a una multiplicidad de expresiones análogas referidas a simplexes

ortocéntricos de cualquier dimensión $m > 2$, en los que está garantizada la existencia del ortocentro, mediante operación en un espacio superior de dimensión $m+1$, en el que se verifica asimismo, la existencia de dos puntos simétricos respecto del hiperplano de posición del m -simplex, reales o imaginarios, que proyectan los $m+1$ vértices según un sistema ortonormal. La posible condición imaginaria de estos dos puntos, por ejemplo, en el caso plano estudiado, si se trata de un triángulo obtusángulo, no es significativa en cuanto a las relaciones métricas resultantes, equivalentes a (V). Por otro lado, ni la trigonometría plana, ni siquiera la esférica, nos serían ya de gran utilidad en nuestro planteamiento tridimensional ni, ad majorem causam, en espacios de dimensiones superiores. Los lectores interesados en esta última profundización y en las formulaciones multidimensionales, más sofisticadas, así deducidas, las encontrarán en las Secciones IV.1 a IV.8 y V.2.6 del texto publicado como ebook en bubok, que es de descarga gratuita: <http://www.bubok.es/libros/211306/GEOMETRIA-DUAL-INVOLUTIVA-EN-ESPACIOS-MULTIDIMENSIONALES>. ■

