

SOBRE AREAS TRIANGULARES

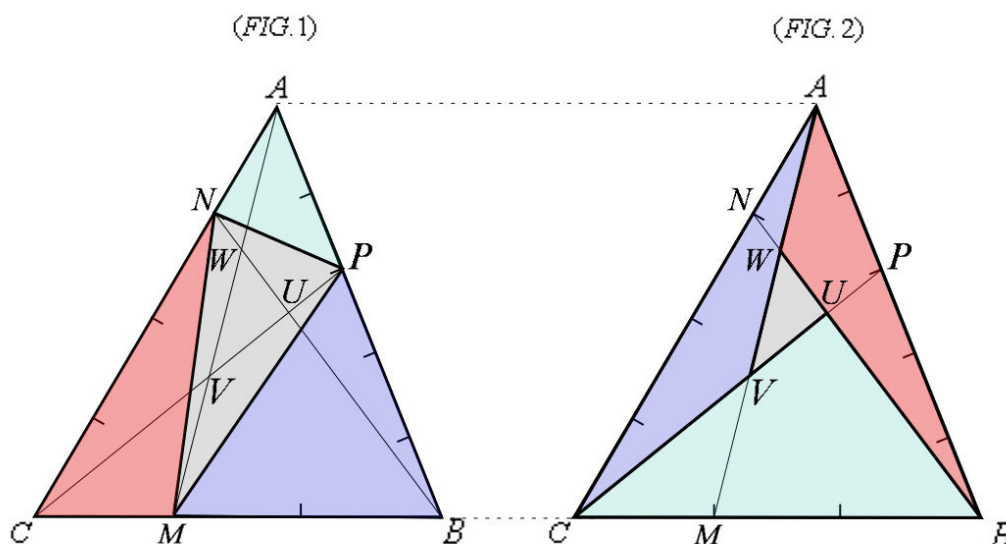
Sea el triángulo base ABC y M,N,P puntos situados en cada uno de los lados BC,CA,AB, no coincidentes con los vértices A,B y C. La definición precisa de los puntos M,N,P se establece mediante las razones simples signadas

$$r_1 = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}, r_2 = \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}, r_3 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}. \quad (I)$$

quedando por tanto excluidos los valores $r_i \neq 0, \infty$.

Las rectas AM,BN,CP, con las denominaciones alternativas de cevianas/seudocevianas en cada supuesto de concurrencia/no concurrencia, determinan, en el primero, un punto Q, y, en el segundo, un triángulo UVW, con $U=BN \cdot CP$, $V=CP \cdot AM$, $W=AM \cdot BN$. Llamaremos, por extensión triángulo ceviano al triángulo MNP, denominación ésta aplicable en los casos primero y segundo, y triángulo seudoceviano al triángulo UVW, que en el caso primero se reduce al punto Q, intersección común de las tres rectas cevianas AM,BN y CP.

Las deducciones subsiguientes se basan en sendas determinaciones de las áreas de cada triángulo MNP y UVW, en función del área del triángulo básico ABC y de las tres razones simples definitorias r_1, r_2, r_3 . La representación destacada de ambos triángulos en las FIGs.1 y 2, que será utilizada como referencia concreta a lo largo de las sucesivas exposiciones, corresponde a la terna de valores particulares $r_1=2, r_2=3, r_3=2/3$.



a) Área del triángulo MNP

De la descomposición triangular del triángulo base ABC, se deriva (FIG. 1)

$$S_{MNP} = S_{ABC} - (S_{PBM} + S_{MCN} + S_{CAP})$$

La relación de las áreas de los triángulos ABC y PBM con un vértice y ángulo común es la relación de los productos de los lados concurrentes en B, y teniendo en cuenta las relaciones (I),

$$S_{PBM} = \frac{BM \cdot BP}{BC \cdot BA} S_{ABC} = \frac{r_1}{1+r_1} \times \frac{1}{1+r_3} S_{ABC}.$$

Las áreas S_{MCN} y S_{NAP} se deducen sucesivamente mediante simples permutaciones cíclicas, luego se tiene finalmente la siguiente expresión del área del triángulo MNP,

$$S_{MNP} = \left(1 - \frac{r_1}{(1+r_1)(1+r_3)} - \frac{r_2}{(1+r_2)(1+r_1)} - \frac{r_3}{(1+r_3)(1+r_2)} \right) S_{ABC},$$

y efectuando las operaciones algebraicas

$$S_{MNP} = \frac{1 + r_1 r_2 r_3}{(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)} S_{ABC} \quad (II)$$

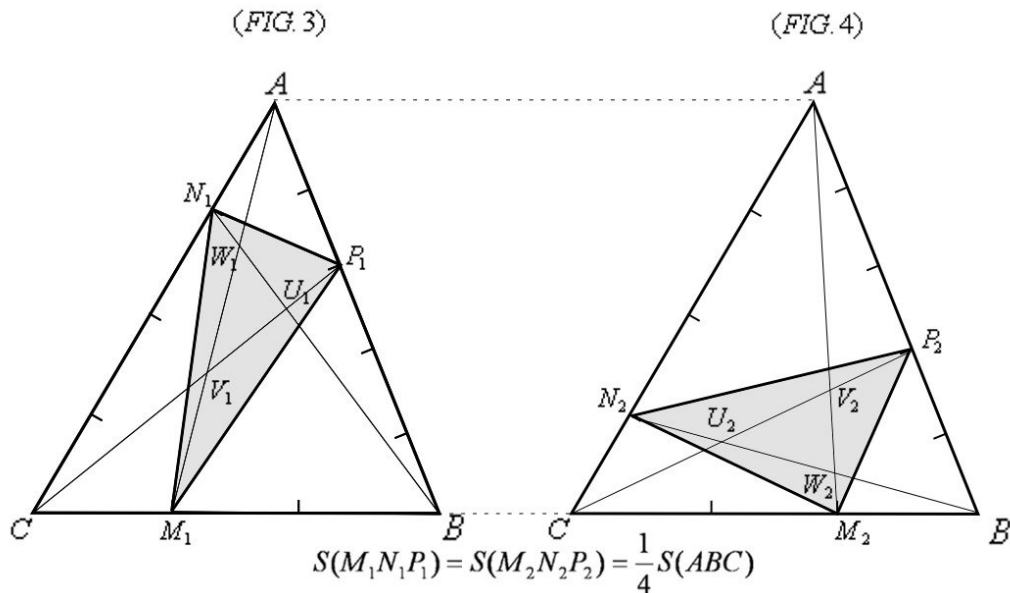
Son consecuencias directas de (II):

- La anulación del numerador, esto es, la condición $r_1 r_2 r_3 = -1$ supone el área nula del triángulo MNP, que implica que los tres vértices cevianos M, N, P están alineados, obteniéndose así la condición definitoria del teorema de Menelao.

- La condición anterior se escribe en la forma alternativa $(-r_1)(-r_2)(-r_3) = 1$ y, puesto que los dos puntos cevianos definidos por las razones $r_i, -r_i$ son conjugados armónicos de los vértices, cuyas rectas cevianas son concurrentes en el punto armónico asociado de la recta representativa del triángulo degenerado UVW , se obtiene también, de forma esta forma dual, la condición alternativa representativa del teorema de Ceva.

- En primer lugar, puesto que (II) es una expresión simétrica en las variables r_1, r_2, r_3 , asignables indistintamente, cada una de ellas, a uno cualquiera de los lados del triángulo ABC, se deriva que para ternas de tres valores distintos, excluído el mencionado caso ceviano, asignados indistintamente a los tres lados del triángulo ABC, resultan $3! = 6$ triángulos cevianos equivalentes al triángulo MNP. Hacemos notar que la significación geométrica del término equivalente, hace referencia a figuras y sólidos de formas distintas que tienen igual área o volumen.

- Además, puesto que la misma expresión (II) es invariable para la terna de valores inversos $1/r_1, 1/r_2, 1/r_3$, a la que corresponde la terna de vértices pseudocevianos, que son los simétricos respectivos de M,N,P respecto del punto medio del lado correspondiente, si se cumplen las tres desigualdades indicadas, y también los tres valores r_1, r_2, r_3 distintos de -1, esto es no coincidente ninguno con el punto medio asociado, el número de triángulos equivalentes es 12. Este número total se reduce si no se verifica alguna de las desigualdades citadas, por las multiplicidades conexas producidas.



En la representación anterior de cada triángulo MNP en las FIGs. 3 y 4, se han aplicado a los vértices los subíndices 1 y 2 alternativos, en orden a la diferenciación entre los dos triángulos análogos en cada figura, correspondientes a las ternas de valores particulares respectivas, $r_1=2, r_2=3, r_3=2/3$ y $r_1=1/2, r_2=1/3, r_3=3/2$, aplicadas de forma homogénea a los tres lados del triángulo base en uno y otro caso.

b) Área del triángulo UVW

Como en el caso anterior, de la descomposición triangular del triángulo base ABC, se deriva (FIG.2)

$$S_{UVW} = S_{ABC} - (S_{AWB} + S_{BUC} + S_{CVA})$$

Aplicando el mismo criterio anterior de comparación de las áreas a los triángulos ABC y ABM, resulta

$$S_{ABM} = \frac{BM}{BC} S_{ABC} = \frac{r_1}{1+r_1} S_{ABC}$$

mientras de la aplicación análoga a los triángulos AMB y AWB,

$$S_{AWB} = \frac{AW}{AM} S_{ABM}$$

La conclusión anterior definitoria del Teorema de Menelao, relativa al triángulo AMC y la transversal BWN, se escribe

$$\frac{NC}{NA} \times \frac{WA}{WM} \times \frac{BM}{BC} = 1$$

luego resulta

$$\frac{WM}{WA} = \frac{r_2}{1} \times \frac{r_1}{1+r_1}$$

y también

$$\frac{AW}{AM} = \frac{1+r_1}{1+r_1+r_1r_2},$$

o bien

$$S_{AWB} = \frac{r_1}{1+r_1+r_1r_2} S_{ABC},$$

También como en el caso anterior, las áreas de los otros dos triángulos parciales análogos se deducen mediante permutación circular de los subíndices, indistintamente en uno cualquiera de los sentidos dextrógiro y/o levógiro, luego se obtiene finalmente la siguiente expresión del área del triángulo UVW

$$S_{UVW} = S_{ABC} - (S_{AWB} + S_{BUC} + S_{CVA}) = \left(1 - \frac{r_1}{1+r_1+r_1r_2} - \frac{r_2}{1+r_2+r_2r_3} - \frac{r_3}{1+r_3+r_3r_1} \right) S_{ABC},$$

y efectuando nuevamente las operaciones algebraicas resulta la expresión obtenida y posteriormente referenciada en la matemática tradicional como teorema de Routh (Ref. [1]),

$$S_{UVW} = \frac{(1-r_1r_2r_3)^2}{(1+r_1+r_1r_2)(1+r_2+r_2r_3)(1+r_3+r_3r_1)} \quad \text{(III)}$$

A diferencia de (II), la expresión (III) no es ya estrictamente simétrica en las variables r_1, r_2, r_3 , aunque sí se mantiene invariante para sus tres posibles asignaciones cíclicas a los lados en el sentido dextrógiro.

A su vez, la asignación inicial r_1, r_3, r_2 respectivamente a los lados BC, CA, AB, que implica la sustitución paralela alternativa del significado geométrico del par de valores r_2, r_3 , da el resultado

$$S_{UVW} = \frac{(1-r_1r_2r_3)^2}{(1+r_1+r_1r_3)(1+r_2+r_2r_1)(1+r_3+r_3r_2)}. \quad \text{(IV)}$$

que se mantiene igualmente invariante para las tres posibles asignaciones cíclicas de la misma ordenación anterior r_1, r_2, r_3 , bien que dispuestas ahora en sentido levógiro.

Son análogamente consecuencias directas conjuntas de (III) y de (IV):

- La anulación del numerador común, esto es, la condición $r_1r_2r_3 = 1$ supone el área nula del triángulo UVW, que implica que las tres rectas AM, BN, CP, ahora propiamente cevianas son

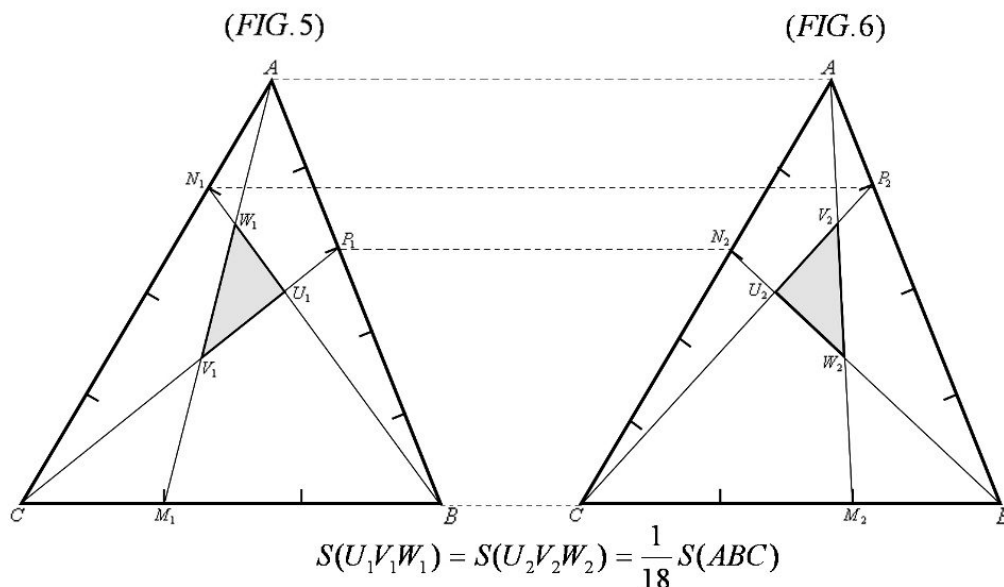
concurrentes en un punto Q, obteniéndose así nuevamente la condición definitoria del teorema de Ceva, en esta segunda deducción, como un subproducto del teorema de Routh.

- Recíprocamente, en el supuesto indicado del teorema de Ceva, esto es, si las rectas AM, BN, CP son concurrentes en un punto Q, se cumple la condición $r_1 r_2 r_3 - 1 = 0$, que se expresa también en la forma alternativa $(-r_1)(-r_2)(-r_3) + 1 = 0$; y, puesto que los tres valores opuestos $-r_1, -r_2, -r_3$ corresponden a los puntos conjugados de cada vértice ceviano, M, N, P, respecto de cada uno de los pares BC, CA, AB, que son tres puntos alineados en la recta armónica asociada de Q, se deduce también, por esta vía indirecta, la propiedad específica definitoria del Teorema de Menelao, relativo a las intersecciones de los lados del triángulo básico con una recta cualquiera.

- Las coordenadas del vértice $U \equiv BN.CR$ se escriben $U \equiv (1, r_2, r_2 r_3)$, mientras la ecuación de la recta impropia en las coordenadas triangulares baricéntricas se escribe $x + y + z = 0$. Se comprueba, por tanto, que la anulación de un factor cualquiera de los dos denominadores representa el paralelismo de las dos pseudocevianas asociadas a las dos variables involucradas, de manera que el triángulo único objeto de análisis tiene un vértice impropio y resulta el valor infinito del área, mientras el área del triángulo alternativo es finita.

- De las respectivas invarianzas indicadas de (III) y de (IV), mediante asignaciones cíclicas de la terna r_1, r_2, r_3 a los lados del triángulo base en los sentidos opuestos dextrorsum/sinistrorsum, se derivan dos grupos diferenciados de cada tres triángulos equivalentes.

- Además, si se considera la terna de valores inversos $1/r_1, 1/r_2, 1/r_3$, teniendo en cuenta de nuevo que para asignaciones de cualquier par $r_i, 1/r_i$ en un mismo lado, los dos puntos correspondientes resultan simétricos respecto del punto medio del lado, si se cumplen las tres desigualdades entre cada par de valores r_1, r_2, r_3 , y también los tres valores distintos de -1, y se disponen en el triángulo base en el orden cíclico inverso del anterior, esto es, ordenadas cada una de las ternas de valores numéricos r_1, r_2, r_3 $1/r_1, 1/r_2, 1/r_3$ y , en los respectivos sentidos dextrorsum/sinistrorsum y/o sinistrorsum/dextrorsum, resultan sendos grupos de 3+3 triángulos, integrado cada uno de ellos por seis triángulos equivalentes.



La representación en la FIG.6 de los puntos M_2, N_2, P_2 y del triángulo $U_2V_2W_2$, corresponde ahora también a valores $r_1=1/2, r_2=1/3, r_3=3/2$, aunque dispuestos ya en el orden inverso citado. Observamos que en la ordenación sinistrorsum de la segunda terna, que implica la sustitución paralela alternativa del significado geométrico del par de valores r_2, r_3 , existe un solo vértice en cada triángulo, cuyo simétrico respecto del punto medio del lado es, asimismo, un vértice de su triángulo homólogo en la ordenación de la terna primera (en las FIGs. 5 y 6, el par M_1, M_2 correspondiente al lado BC). Observamos también que, en virtud de la

proporcionalidad establecida por el segundo teorema de Tales, las dos rectas definidas por los otros dos pares, N_1, P_2 y P_1, N_2 , son ambas paralelas a la alineación BC, que es común en las representaciones efectuadas de cada triángulo.

- En el supuesto $r_1=r_2=r_3=r$ ambos grupos de 3+3 triángulos cada uno son obviamente coincidentes y, como consecuencia de las multiplicidades conexas producidas, existen sólo dos triángulos distintos, asociados a las ternas r, r, r y $1/r, 1/r, 1/r$, que son además equivalentes, como corresponde al caso de referencia analizado en la Ref. [5], origen de nuestro comentario. La expresión común del área resulta,

$$S_{UVW} = \frac{(1-r)^2}{1+r+r^2} S_{ABC},$$

que en el caso particular $r=1/2$, considerado en las Refs. [3] y [5], da el valor

$$S_{UVW} = \frac{1}{7} S_{ABC}.$$

- Finalmente, puesto que la suma y el producto de las expresiones (III) y (IV) son funciones simétricas en las variables r_1, r_2, r_3 y también invariables para la terna $1/r_1, 1/r_2, 1/r_3$, se deriva que la suma y/o el producto de las áreas de dos triángulos pertenecientes respectivamente a cada uno de los sextetos asociados a cada expresión (III) y (IV), se mantienen una y otro constantes.

REFERENCIAS

- [1].- *Edward John Routh, A treatise on Analytical Statics, with numerous examples (Cambridge University Press, Vol. 1, p.82, 1891).*
 [2].- *Hugo Steinhus, Mathematical Snapshots (Oxford University Press, 1983).*
 [3].- *Ricard Peiró, Geometría Interactiva, Teoremas sobre Triangles (2000-2007-2013).*
 [4].- *F. Damián Aranda y M. Gómez Lara Problemas divulgativos (Epsilon, Revista de Educación Matemática, Vol. 28(2), nº 78, pp.99-109, 2011),*
 [5].- *David Vergés, Geometría Afín III, El retorno del triángulo (La Voz del Colegiado, CICCyP, nº 367, pp.20-21, Enero 2013).*
 [6].- *Pablo Rubio, Una aplicación del teorema de Routh relativa a áreas triangulares (La Voz del Colegiado, CICCyP, nº 377, pp.26-28, 2014).*