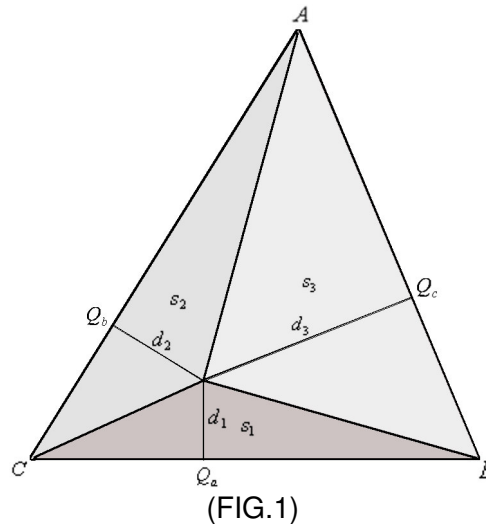


## LA CONFIGURACIÓN CEVIANA

### 1.- El Sistema coordenado trilineal baricéntrico

#### 1.1.- Definición de las coordenadas trilineales

La posición de un punto Q en el plano a partir de un triángulo de referencia base ABC se define mediante dos tipos de coordenadas directamente relacionadas (FIG.1):



Las coordenadas trilineales normales absolutas,  $Q(d_1, d_2, d_3)$ , son las distancias signadas a los lados, correspondiendo el signo positivo a los semiplanos que contienen al triángulo y el signo negativo a cada semiplano complementario.

Las coordenadas trilineales baricéntricas, igualmente absolutas,  $Q(s_1, s_2, s_3)$ , son las áreas signadas de los triángulos de vértices el punto y cada par de vértices del triángulo, manteniendo la misma equivalencia de signos.

Si  $a, b, c$  son las longitudes de los lados y  $S$  el área del triángulo base, se cumplen las relaciones

$$\left. \begin{aligned} ad_1 + bd_2 + cd_3 &= 2S \\ s_1 &= \frac{1}{2}ad_1, s_2 = \frac{1}{2}bd_2, s_3 = \frac{1}{2}cd_3 \\ s_1 + s_2 + s_3 &= S \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

El triángulo de referencia se explicita con las notaciones alternativas  $S(ABC)$  y/o  $S_{ABC}$ .

En la exposición se utiliza también la expresión de la suma de cuadrados de las longitudes de los lados de un triángulo, con las notaciones  $L^2(ABC)$  y/o  $L_{ABC}^2$ ,

$$L^2(ABC) = a^2 + b^2 + c^2$$

Se reservan las notaciones abreviadas  $S, L^2$ , referidas, en particular, al triángulo ABC.

Teniendo en cuenta la primera y/o la tercera condición (1.1), las ecuaciones algebraicas que representan una relación entre las coordenadas trilineales  $d_1, d_2, d_3$  y/o  $s_1, s_2, s_3$  se expresan mediante la anulación de funciones homogéneas en las tres variables

utilizadas, pudiendo, por tanto, referirse igualmente a coordenadas relativas, esto es, afectadas las absolutas por un factor de proporcionalidad arbitrario.

### 1.2.- Formulaciones algébricas trilineales

Nos referimos aquí, en concreto, a la deducción de sendas expresiones del área, ¡nuevamente signada!, de un triángulo  $Q_1Q_2Q_3$  y del cuadrado de la distancia entre dos puntos  $Q_1, Q_2$  en el sistema de coordenadas trilineales baricéntricas absolutas,

$$Q_i \equiv (s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}), i = 1,2,3; i = 1,2$$

aplicando las siguientes expresiones conocidas en el sistema coordenado bilineal ortogonal,

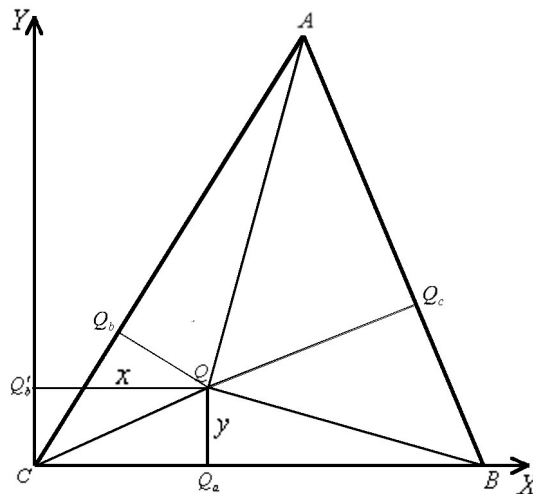
$$Q_i \equiv (x_i, y_i), i = 1,2,3; i = 1,2,$$

esto es,

$$S_{Q_1Q_2Q_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$D_{Q_1Q_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (1.3)$$

estableciendo su conversión al sistema trilineal baricéntrico, eligiendo al efecto, la relación gráfica siguiente entre los dos sistemas de coordenadas (FIG.2).



(FIG.2)

En primer lugar, las coordenadas ortogonales de los vértices del triángulo base resultan

$$A \equiv (b \cos C, b \sin C)$$

$$B \equiv (a, 0)$$

$$C \equiv (0, 0)$$

y teniendo en cuenta la significación de Q como el centro de gravedad de los vértices A,B,C afectados de coeficientes  $s_1 S_{ABC}^{-1}, s_2 S_{ABC}^{-1}, s_3 S_{ABC}^{-1}$ , que son coordenadas baricéntricas relativas, se obtienen

$$x = s_1 S_{ABC}^{-1} b \cos C + s_2 S_{ABC}^{-1} a$$

$$y = s_1 S_{ABC}^{-1} b \sin C$$

luego sustituyendo en las expresiones (1.2) y (1.3)

$$\begin{aligned}
 S_{Q_1Q_2Q_3} &= \frac{1}{2} S_{ABC}^{-2} \begin{vmatrix} s_{11}b \cos C + s_{12}a & s_{11}b \operatorname{sen} C & 1 \\ s_{21}b \cos C + s_{22}a & s_{21}b \operatorname{sen} C & 1 \\ s_{31}b \cos C + s_{32}a & s_{31}b \operatorname{sen} C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} S_{ABC}^{-2} ab \operatorname{sen} C \begin{vmatrix} s_{12} & s_{11} & 1 \\ s_{22} & s_{21} & 1 \\ s_{32} & s_{31} & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= S_{ABC}^{-1} \begin{bmatrix} s_{12} & s_{11} & 1 \\ s_{22} & s_{21} & 1 \\ s_{32} & s_{31} & 1 \end{bmatrix} = S_{ABC}^{-1} (s_{12}s_{21} + s_{11}s_{32} + s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32} - s_{11}s_{22} - s_{31}s_{12})
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Se obtiene una forma simétrica de (1.4) en las tres coordenadas baricéntricas mediante las tres permutaciones cíclicas

$$\begin{aligned}
 S_{Q_1Q_2Q_3} &= \frac{1}{3} S_{ABC}^{-1} \left( \begin{vmatrix} s_{12} & s_{11} & 1 \\ s_{22} & s_{21} & 1 \\ s_{32} & s_{31} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{13} & s_{12} & 1 \\ s_{23} & s_{22} & 1 \\ s_{33} & s_{32} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} & 1 \\ s_{21} & s_{23} & 1 \\ s_{31} & s_{33} & 1 \end{vmatrix} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} S_{ABC}^{-1} (s_{12}s_{21} + s_{11}s_{32} + s_{22}s_{31} + s_{13}s_{22} + s_{12}s_{33} + s_{23}s_{32} + s_{11}s_{23} + s_{21}s_{33} + s_{13}s_{31} - \\
 &- s_{21}s_{32} - s_{11}s_{22} - s_{12}s_{31} - s_{22}s_{33} - s_{12}s_{23} - s_{13}s_{32} - s_{23}s_{31} - s_{13}s_{21} - s_{11}s_{33}) = \\
 &= \frac{1}{3} S_{ABC}^{-1} (s_{11}s_{32} + s_{11}s_{23} + s_{22}s_{13} + s_{22}s_{31} + s_{33}s_{12} + s_{33}s_{21} - s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{33}s_{11} + \\
 &+ s_{12}s_{21} + s_{23}s_{32} + s_{13}s_{31} - s_{21}s_{32} - s_{12}s_{31} - s_{12}s_{23} - s_{13}s_{32} - s_{23}s_{31} - s_{13}s_{21})
 \end{aligned}$$

Asimismo, a partir de (1.3)

$$\begin{aligned}
 D_{Q_1Q_2}^2 &= S^{-2} [(s_{11} - s_{21})b \cos C + (s_{12} - s_{22})a]^2 + S^{-2} [(s_{11} - s_{21})b \operatorname{sen} C]^2 = \\
 &= S^{-2} [(s_{11} - s_{21})^2 b^2 + (s_{12} - s_{22})^2 a^2 + 2(s_{11} - s_{21})(s_{12} - s_{22})ab \cos C]
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la relación conocida

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

resulta

$$D_{Q_1Q_2}^2 = S^{-2} [(s_{12} - s_{22})(s_{12} + s_{11} - s_{22} - s_{21})a^2 + (s_{11} - s_{21})(s_{11} + s_{12} - s_{21} - s_{22})b^2 - (s_{11} - s_{21})(s_{12} - s_{22})c^2]$$

y teniendo en cuenta la tercera expresión (1.1) se obtiene la siguiente expresión simétrica en las coordenadas trilineales

$$D_{Q_1Q_2}^2 = -S^{-2} [(s_{12} - s_{22})(s_{13} - s_{23})a^2 + (s_{11} - s_{21})(s_{13} - s_{23})b^2 + (s_{11} - s_{21})(s_{12} - s_{22})c^2] \tag{1.5}$$

Las dos expresiones (1.4) y (1.5) serán de utilidad en la Sección 1.3.

## 2.- El teorema de Ceva

### 2.1.- La condición ceviana

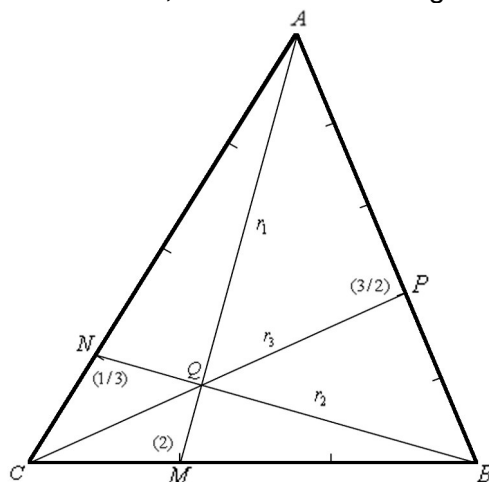
Sea el triángulo ABC y M,N,P puntos situados en cada lado AB,BC,CA. La definición precisa de los puntos M,N,P se establece mediante las razones simples signadas,

$$r_1 = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}, r_2 = \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}, r_3 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

La condición ceviana que supone la concurrencia de las rectas AM,BN,CP en un punto Q (FIG.3), tiene la conocida expresión del teorema homónimo

$$r_1 r_2 r_3 = 1 \quad (2.1)$$

que, como indicábamos en el estudio *Sobre Áreas Triangulares*, cuyo enlace figura en un comentario anterior en el *blog* de [www.prubper.com](http://www.prubper.com), es una consecuencia particularizada del teorema de Routh, de enunciado más general.



(FIG.3)

La representación en la FIG.3 corresponde así a la terna de valores particulares  $r_1=2$ ,  $r_2=1/3$ ,  $r_3=3/2$ , como serán mantenidos también en las FIGs. siguientes 4,5,7 y 8, que se explicitan en la propia gráfica como las abscisas relativas de los puntos de intersección de cada ceviana correspondiente sobre los lados.

## 2.2.- Significación geométrica de los parámetros cevianos

Al objeto del desarrollo presente tiene también interés la deducción alternativa directa de la expresión (2.1), teniendo simplemente en cuenta las relaciones (1.1).

Las coordenadas trilineales normales de los puntos M,N,P, que llamamos cevianos, así por ejemplo

$$M \equiv (0, m_2, m_3)$$

La ecuación de la recta ceviana AM en el sistema trilineal normal es obviamente

$$\frac{d_3}{d_2} = \frac{m_3}{m_2}$$

y también

$$\frac{d_3}{d_2} = \frac{\overline{BM} \operatorname{sen} B}{\overline{MC} \operatorname{sen} C} = \frac{r_1 b}{c}$$

La expresión signada del parámetro  $r_1$ , aplicable a un punto cualquiera de la recta AM, y en particular a la intersección común Q de las tres rectas cevianas, resulta

$$r_1 = \frac{d_3 c}{d_2 b} = \frac{s_3}{s_2}$$

y teniendo en cuenta las otras dos expresiones cíclicas análogas, la condición ceviana (2.1) resulta inmediata, habiéndose obtenido además, como decimos una segunda significación geométrica de los parámetros cevianos  $r_1, r_2, r_3$ , como relación de pares de coordenadas baricéntricas, indistintamente absolutas o relativas, relativas a los lados concurrentes con la correspondiente recta ceviana, que nos será de aplicación posterior.

### 3.- La configuración ceviana

#### 3.1.- Generación y propiedades proyectivas de la configuración ceviana

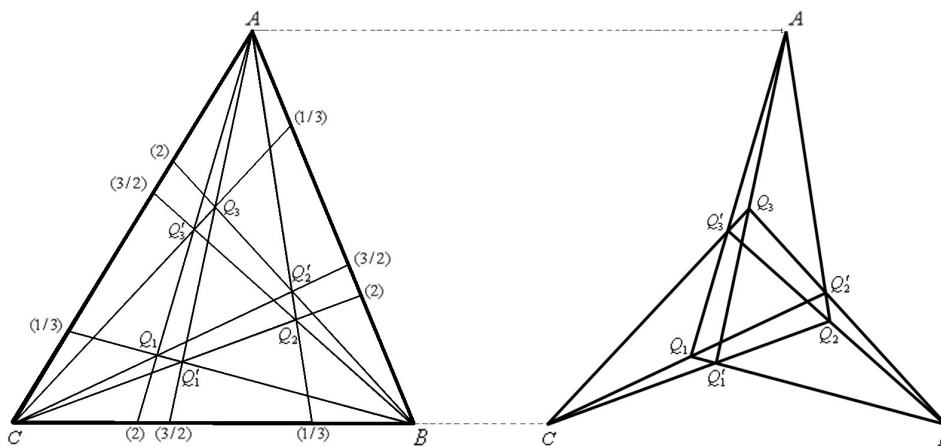
La denominación configuración o la extendida y todavía genérica, configuración de Desargues, comprende un significado concreto en geometría como un conjunto de incidencias de  $n$  rectas y  $m$  puntos tal que cada recta, contiene  $p$  puntos y por cada punto, pasan  $r$  rectas, en notación simbólica  $(m_r, n_p)$ , también de Desargues. Se cumple, en consecuencia, la relación  $m \cdot r = n \cdot p$ . En el caso particular  $m=n$  y, por tanto, también  $p=r$ , la configuración se llama dual, con la representación simplificada  $(m_r)$ .

Nos referimos aquí a la que llamaremos configuración ceviana, asociada a las propiedades deducidas como una consecuencia del teorema de Routh, en el documento *Sobre Áreas Triangulares*, anteriormente mencionado.

En la misma línea de las conclusiones apuntadas en el documento anterior sobre la fórmula del área de Routh, se deduce que, puesto que la expresión (2.1) es simétrica en las variables  $r_1, r_2, r_3$ , asignando las mismas a cada lado de un triángulo escaleno ABC de las  $3! = 6$  maneras posibles, manteniendo únicamente invariable la terna completa, resultan seis puntos cevianos distintos.

La representación en la FIG.4 corresponde de nuevo, como hemos anticipado, a los valores particulares  $r_1=2, r_2=1/3, r_3=3/2$ , si bien asignados ahora los tres indiferentemente a los lados. Se pospone a la subsección 3.3 una descripción justificativa de las dos notaciones puntuales utilizadas.

La supresión de las rectas AB, BC, CA en esta FIG.4 da directamente la representación de una configuración dual  $9_3$ , (FIG.5), que no requiere mayor justificación adicional, a la que denominamos, por razón de la propia generación utilizada, la configuración ceviana.

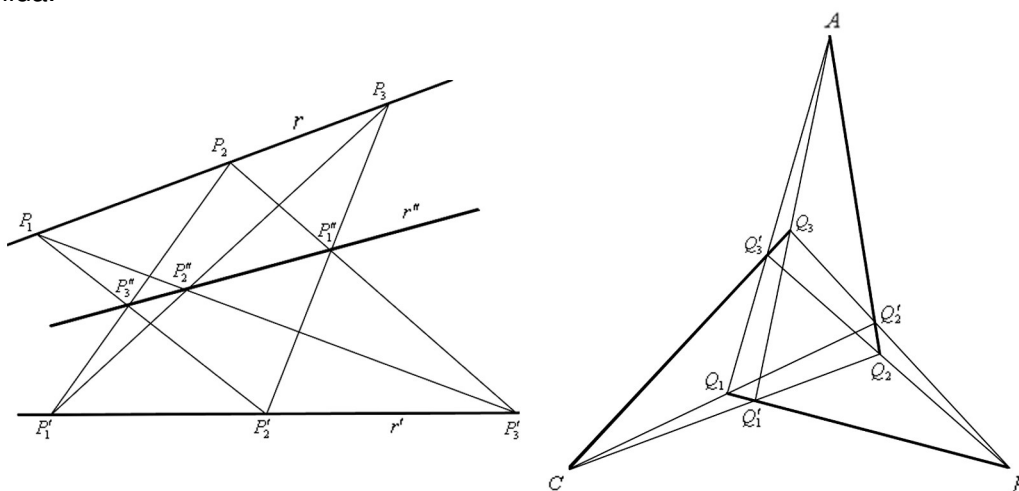


(FIGS. 4 y 5)

### 3.2.- La relación con el teorema de Pappus

Es interesante destacar una connotación interesante de la configuración ceviana, y con mayor generalidad de cualquier configuración  $9_3$ , en cuanto a su relación con el famoso teorema del hexágono de Pappus. El resultado de Pappus de Alejandría (290-350) constituyó en palabras del matemático Max Dehn (1878-1952) un "acontecimiento en la historia de la geometría" pues ha significado ciertamente el elemento básico esencial en el desarrollo de la geometría proyectiva plana.

El enunciado de Pappus, representado por el hexágono  $P_1P_2P_3P'_1P'_2P'_3$  en la (FIG.6), se expresa: Dadas dos series proyectivas lineales, definidas por las rectas  $r$  y  $r'$ , respectivamente incidentes con las dos ternas puntuales  $P_1, P_2, P_3$  y  $P'_1, P'_2, P'_3$ , y definida además la relación homográfica  $(P_1P_2P_3 Z)=(P'_1P'_2P'_3 Z')$ , las intersecciones cruzadas de pares de puntos homólogos, esto es,  $P''_1=P_2P'_3 \cdot P_3P'_2$ ,  $P''_2=P_3P'_1 \cdot P_1P'_3$ ,  $P''_3=P_1P'_2 \cdot P_2P'_1$ , están alineadas. La tercera recta  $r''$ , incidente con  $P''_1, P''_2, P''_3$ , recibe la conocida denominación de eje de colineación. Las tres rectas  $r, r', r''$  presentan comportamientos proyectivos simétricos, es decir, eligiendo como dos series homográficas las ternas de puntos incidentes con otro par arbitrario de rectas,  $r, r''$  o  $r', r''$ , mediante una determinación obvia adecuada de los tres pares de puntos homólogos, la recta restante,  $r'$  o  $r$ , es el eje de colineación de la proyectividad así definida.



(FIGS. 6 y 7)

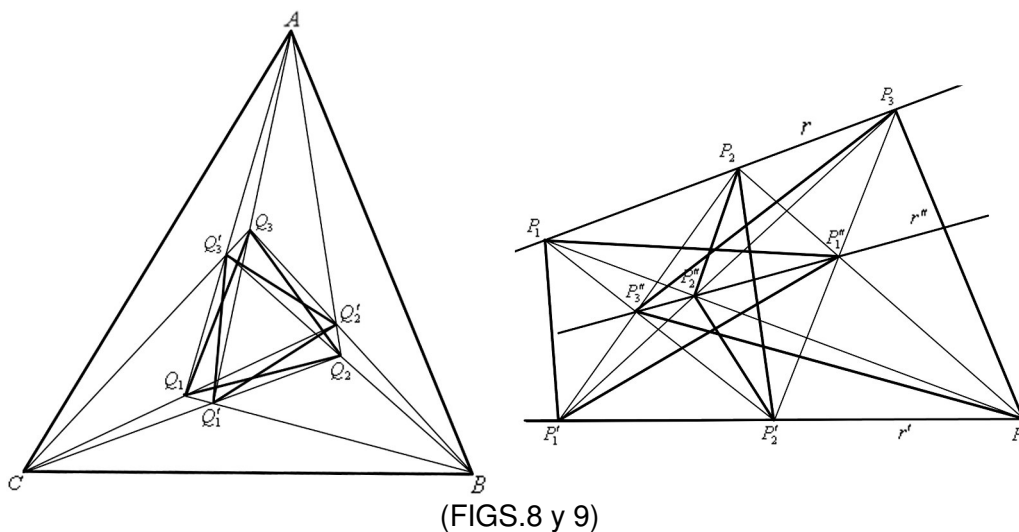
Volviendo a la configuración ceviana, se identifica, en efecto, como un caso singular, realmente especial, de este teorema clásico. La adecuación de la (FIG.5) a la (FIG.6), representada como (FIG.7), puede realizarse, al efecto, de nueve maneras distintas, reducibles a tres en función de la simetría de rectas apuntada, entre las dos rectas mediante selección de pares/ternas de rectas básicas  $r, r'/r, r', r''$  pertenecientes a la configuración y no incidentes en un punto común de la misma; en la (FIG.7), las rectas  $Q_1Q'_1B, Q_3Q'_3C/ Q_1Q'_1B, Q_3Q'_3C, Q_2Q'_2A$ . El número de ternas así elegidas posible es tres, y cada una de ellas determina tres hexágonos de Pappus distintos según la selección que se haga en la misma de las dos rectas base, representado la tercera recta el eje de colineación correspondiente. La definición de los pares de puntos homólogos de cada homografía así seleccionada es obvia pues son los puntos cuya recta de unión no pertenece a la configuración ( $9_3$ ).

Destacamos, por último, de nuevo, que la identificación efectuada entre las (FIG.6) y (FIG.7) es igualmente aplicable a cualquier configuración genérica dual del mismo tipo ( $9_3$ ), si bien debemos destacar desde ahora el carácter ciertamente singular de la

configuración ceviana, dado que junto a propiedades proyectivas compartidas, derivadas de la identificación señalada, participa además de diversas propiedades métricas significativas, éstas ya de manera exclusiva, derivadas a su vez de la disposición generatriz específica en el triángulo base. La descripción concreta de ambas clases de propiedades, proyectivas y métricas, las primeras comunes y las segundas específicas de la configuración ceviana, figura en las subsecciones siguientes.

### 3.3.- Propiedades proyectivas de la configuración ceviana

De nuevo en la misma línea de las deducciones anteriormente aplicadas, sobre la identificación con el resultado de Pappus, interesa destacar otras dos derivaciones interesantes resultantes de la propia FIG.4.



3.3.1) En primer lugar, el conjunto de los seis puntos cevianos, se divide en dos subconjuntos que corresponden a las asignaciones de las variables  $r_1, r_2, r_3$  a los lados de manera cíclica en cada uno de los respectivos sentidos dextrorsum/sinistrorsum. Resultan así los dos triángulos respectivos  $Q_1Q_2Q_3$  y  $Q'_1Q'_2Q'_3$  (FIG.8), y de la simple inspección de los triángulos de la terna  $ABC, Q_1Q_2Q_3, Q'_1Q'_2Q'_3$ , se deriva que los tres triángulos tienen comportamientos simétricos y, en concreto:

Dos triángulos son triplemente homológicos y los centros de homología correspondientes son los vértices del triángulo tercero.

Se comprueba asimismo directamente que los tres triángulos  $P_1P''_1P'_1, P_2P''_2P'_2, P_3P''_3P'_3$ , representados en la (FIG.9), homólogos de los anteriores en el esquema de Pappus, verifican entre sí la misma propiedad, común, como decimos, a cualquier otra configuración ( $9_3$ ).

Observamos, no obstante, que esta propiedad triple homológica no se cumple, en general, en el caso de una homología simple.

3.3.2) En segundo lugar, dos triángulos son triángulos cevianos del tercero, para ternas de valores equivalentes a la terna inicial, análogas y asignadas en uno u otro sentidos cíclicos inversos. La justificación de esta coincidencia de ternas generatrices, para cada par de triángulos, respecto del tercero, considerado como el triángulo base, no es evidente y requiere de su consideración analítica proyectiva que analizamos a continuación.

Teniendo en cuenta el significado de los parámetros cevianos  $r_1, r_2, r_3$  considerado en 2.3, las coordenadas baricéntricas relativas de los seis vértices cevianos se escriben,

$$\begin{cases} Q_1 \equiv (r_1 r_2, 1, r_1) \\ Q_2 \equiv (1, r_1, r_1 r_2) \\ Q_3 \equiv (r_1, r_1 r_2, 1) \\ Q'_1 \equiv (r_2, r_2 r_1, 1) \\ Q'_2 \equiv (r_2 r_1, 1, r_2) \\ Q'_3 \equiv (1, r_2, r_2 r_1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Las coordenadas baricéntricas absolutas, con la significación mencionada de áreas, resultan de aplicar a los dos grupos coordenados anteriores cada uno de los coeficientes respectivos

$$c(Q_1 Q_2 Q_3) = \frac{S}{1 + r_1 + r_1 r_2}, \quad c'(Q'_1 Q'_2 Q'_3) = \frac{S}{1 + r_2 + r_2 r_1}. \quad (3.2)$$

Observamos también que las expresiones anteriores admiten tres formas equivalentes análogas, según la selección del par de parámetros que figuran en las mismas explícitos, efectuando en cada una de ellas las transformaciones cíclicas de los mismos y de las propias coordenadas, en los respectivos sentidos dextrógiro o levógiro.

Así, por ejemplo, las coordenadas baricéntricas absolutas del vértice  $Q_1$  admiten las otras dos expresiones isomorfas alternativas

$$Q_1 \equiv \left( \frac{S}{1 + r_3 + r_3 r_1}, \frac{S r_3}{1 + r_3 + r_3 r_1}, \frac{S r_3 r_1}{1 + r_3 + r_3 r_1} \right) \equiv \left( \frac{S r_2}{1 + r_2 + r_2 r_3}, \frac{S r_2 r_3}{1 + r_2 + r_2 r_3}, \frac{S}{1 + r_2 + r_2 r_3} \right)$$

y, también, paralelamente, las análogas del vértice  $Q'_2$  mediante una operación mutatis mutandis de los parámetros  $r_1, r_2$

$$Q'_2 \equiv \left( \frac{S}{1 + r_3 + r_2 r_3}, \frac{S r_3}{1 + r_3 + r_2 r_3}, \frac{S r_2 r_3}{1 + r_3 + r_2 r_3} \right) \equiv \left( \frac{S r_1}{1 + r_1 + r_3 r_1}, \frac{S r_3 r_1}{1 + r_1 + r_3 r_1}, \frac{S}{1 + r_1 + r_3 r_1} \right)$$

Justificada la simetría isomorfa indicada, para mayor comodidad de los desarrollos algebraicos, las expresiones sucesivas se presentan en función de los parámetros  $r_1, r_2$ , dejando de nuevo implícitas las otras dos expresiones equivalentes.

En la determinación inicial de la configuración ceviana,  $r_1, r_2, r_3$  ha sido la terna común generatriz de los triángulos  $Q_1 Q_2 Q_3$  y  $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ .

Eligiendo el triángulo base  $Q_1 Q_2 Q_3$ , la justificación de la coincidencia de ternas de los parámetros generatrices en cada uno de los dos triángulos cevianos  $ABC$  y  $Q'_1 Q'_2 Q'_3$ , esto es, la identificación de las ternas de las coordenadas baricéntricas absolutas de los tres vértices  $A, B$  y  $C$ , y/o de los tres vértices  $Q'_1, Q'_2, Q'_3$ , teniendo además en cuenta la permutación cíclica de los tres elementos en cada una de las ternas, es un simple ejercicio de cálculo, utilizando las expresiones (1.4) del área y (3.1) y (3.2) de las coordenadas de los vértices cevianos.

Como ejemplos ilustrativos, se obtienen para los vértices del triángulo  $ABC$ :



$$\left\{ \begin{array}{l}
S_{AQ_2Q_3} = S^{-1} \left| \begin{array}{cc|c}
0 & 1 & 1 \\
\hline
\frac{S}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{Sr_1r_2}{1+r_1+r_1r_2} & 1 \\
\hline
\frac{Sr_1}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{S}{1+r_1+r_1r_2} & 1
\end{array} \right| = \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2} \left| \begin{array}{ccc|c}
0 & 1+r_1+r_1r_2 & 1 & 1 \\
\hline
1 & r_1r_2 & 1 & 1 \\
\hline
r_1 & 1 & 1 & 1
\end{array} \right| = \frac{Sr_1(r_1-r_2)}{(1+r_1+r_1r_2)^2} \\
\\
S_{CQ_2Q_3} = S^{-1} \left| \begin{array}{cc|c}
0 & 0 & 1 \\
\hline
\frac{Sr_1}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{S}{1+r_1+r_1r_2} & 1 \\
\hline
\frac{Sr_1r_2}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{Sr_1}{1+r_1+r_1r_2} & 1
\end{array} \right| = \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2} \left| \begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
r_1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
r_1r_2 & r_1 & 1 & 1
\end{array} \right| = \frac{Sr_1(r_1-r_2)}{(1+r_1+r_1r_2)^2} \\
\\
S_{BQ_3Q_1} = S^{-1} \left| \begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 1 \\
\hline
\frac{Sr_1r_2}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{Sr_1}{1+r_1+r_1r_2} & 1 \\
\hline
\frac{S}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{Sr_1r_2}{1+r_1+r_1r_2} & 1
\end{array} \right| = \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2} \left| \begin{array}{ccc|c}
1+r_1+r_1r_2 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
r_1r_2 & r_1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & r_1r_2 & 1 & 1
\end{array} \right| = \frac{Sr_1(r_1-r_2)}{(1+r_1+r_1r_2)^2}
\end{array} \right.$$

y las otras dos ternas análogas

$$S_{AQ_2Q_3} = S_{BQ_1Q_2} = S_{CQ_3Q_1} = \frac{Sr_1(r_1r_2^2 - 1)}{(1+r_1+r_1r_2)^2}$$

$$S_{AQ_3Q_1} = S_{BQ_2Q_3} = S_{CQ_1Q_2} = \frac{S(1-r_1^2r_2)}{(1+r_1+r_1r_2)^2}$$

Procediendo análogamente para los vértices del segundo triángulo ceviano,  $Q'_1Q'_2Q'_3$ , respecto del triángulo base  $Q_1Q_2Q_3$ , resultan:

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_2} &= S^{-1} \begin{vmatrix} \frac{Sr_2r_1}{1+r_2+r_2r_1} & \frac{Sr_2}{1+r_2+r_2r_1} & 1 \\ S & Sr_1r_2 & 1 \\ \frac{Sr_1}{1+r_1+r_1r_2} & S & 1 \end{vmatrix} = \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_2r_1)} \begin{vmatrix} r_2r_1 & r_2 & 1+r_2+r_1r_2 \\ 1 & r_1r_2 & 1+r_1+r_1r_2 \\ r_1 & 1 & 1+r_1+r_1r_2 \end{vmatrix} = \\
&= S \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_2r_1)} \begin{vmatrix} r_2r_1 & r_2 & 1 \\ 1 & r_1r_2 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_1r_2 \end{vmatrix} = S \frac{r_1^3r_2^3 + r_1^2r_2 + 1 - r_1^2r_2 - r_1^2r_2 - r_1r_2^2}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_2r_1)} = \\
&= S \frac{(r_1^2r_2 - 1)(r_1r_2^2 - 1)}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_2r_1)} \\
S_{\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3} &= S^{-1} \begin{vmatrix} \frac{S}{1+r_2+r_2r_1} & \frac{Sr_1r_2}{1+r_2+r_2r_1} & 1 \\ \frac{Sr_1}{1+r_1+r_1r_2} & S & 1 \\ \frac{Sr_1r_2}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{Sr_1}{1+r_1+r_1r_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_2r_1)} \begin{vmatrix} 1 & r_1r_2 & 1+r_2+r_2r_1 \\ r_1 & 1 & 1+r_1+r_1r_2 \\ r_1r_2 & r_1 & 1+r_1+r_1r_2 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_2r_1)} \begin{vmatrix} 1 & r_1r_2 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1r_2 \\ r_1r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = S \frac{(r_1^2r_2 - 1)(r_1r_2^2 - 1)}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_2r_1)} \\
S_{\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_1} &= S^{-1} \begin{vmatrix} \frac{Sr_2}{1+r_2+r_1r_2} & \frac{S}{1+r_2+r_1r_2} & 1 \\ \frac{Sr_1r_2}{1+r_1+r_1r_2} & S & 1 \\ \frac{S}{1+r_1+r_1r_2} & \frac{Sr_1r_2}{1+r_1+r_1r_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_1r_2)} \begin{vmatrix} r_2 & 1 & 1+r_2+r_1r_2 \\ r_1r_2 & r_1 & 1+r_1+r_1r_2 \\ 1 & r_1r_2 & 1+r_1+r_1r_2 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{S}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_1r_2)} \begin{vmatrix} r_2 & 1 & r_1r_2 \\ r_1r_2 & r_1 & 1 \\ 1 & r_1r_2 & r_1 \end{vmatrix} = S \frac{(r_1^2r_2 - 1)(r_1r_2^2 - 1)}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_1r_2)}
\end{aligned}$$

y las otras dos ternas análogas

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3} &= S_{\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_1} = S_{\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2} = S \frac{r_1(r_1r_2^2 - 1)(r_2 - r_1)}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_1r_2)} \\
S_{\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_2} &= S_{\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_3} = S_{\mathcal{Q}_3\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_1} = S \frac{(r_1^2r_2 - 1)(r_1 - r_2)}{(1+r_1+r_1r_2)^2(1+r_2+r_1r_2)}
\end{aligned}$$

La elección del triángulo base  $Q'_1Q'_2Q'_3$  y cevianos ABC y  $Q_1Q_2Q_3$  da dos nuevos grupos de otras tres ternas, que resultan simplemente de las tres anteriores mediante la operación mutatis mutandis de las variables  $r_1, r_2$ .

Para los vértices del triángulo ABC,

$$S_{AQ'_1Q'_2} = S_{BQ'_2Q'_3} = S_{CQ'_3Q'_1} = \frac{Sr_2(r_2 - r_1)}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2}$$

$$S_{AQ'_2Q'_3} = S_{BQ'_3Q'_1} = S_{CQ'_1Q'_2} = \frac{Sr_2(r_2r_1^2 - 1)}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2}$$

$$S_{AQ'_3Q'_1} = S_{BQ'_1Q'_2} = S_{CQ'_2Q'_3} = \frac{S(1 - r_2^2r_1)}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2}$$

y para los vértices del triángulo  $Q_1Q_2Q_3$ ,

$$S_{Q_1Q'_1Q'_2} = S_{Q_2Q'_2Q'_3} = S_{Q_3Q'_3Q'_1} = S \frac{(r_2^2r_1 - 1)(r_2r_1^2 - 1)}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2(1 + r_1 + r_1r_2)}$$

$$S_{Q_1Q'_2Q'_3} = S_{Q_2Q'_3Q'_1} = S_{Q_3Q'_1Q'_2} = S \frac{r_2(r_2r_1^2 - 1)(r_1 - r_2)}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2(1 + r_1 + r_1r_2)}$$

$$S_{Q_1Q'_3Q'_1} = S_{Q_2Q'_1Q'_2} = S_{Q_3Q'_2Q'_3} = S \frac{(r_2^2r_1 - 1)(r_2 - r_1)}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2(1 + r_1 + r_1r_2)}$$

Se comprueba directamente que los tres triángulos  $P_1P''_1P'_1$ ,  $P_2P''_2P'_2$ ,  $P_3P''_3P'_3$ , representados en la (FIG.6), verifican entre sí la misma propiedad 3.3.1) y la primera parte de 3.3.2), aunque no se satisface, en general, la identificación de las ternas de parámetros generatrices, los valores  $r_1, r_2, r_3$  en la configuración ceviana, como determinante de la singularidad particular indicada como específica de la configuración ceviana.

### 3.3.- Propiedades métricas de la configuración ceviana

En primer lugar, aplicando, de nuevo, las expresiones (1.3) del área del triángulo y (3.1)+(3.2) de las coordenadas de los vértices cevianos, se obtienen las siguientes expresiones de las áreas de los triángulos  $Q_1Q_2Q_3$  y  $Q'_1Q'_2Q'_3$ :

$$S_{Q_1Q_2Q_3} = S^{-1} \begin{vmatrix} \frac{S}{1 + r_1 + r_1r_2} & \frac{Sr_1r_2}{1 + r_1 + r_1r_2} & 1 \\ \frac{Sr_1}{1 + r_1 + r_1r_2} & \frac{S}{1 + r_1 + r_1r_2} & 1 \\ \frac{r_1r_2}{1 + r_1 + r_2} & \frac{Sr_1}{1 + r_1 + r_1r_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{S}{(1 + r_1 + r_1r_2)^2} \begin{vmatrix} 1 & r_1r_2 & 1 \\ r_1 & 1 & 1 \\ r_1r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= S \frac{1 + r_1^2r_2^2 + r_1^2 - r_1r_2 - r_1 - r_1^2r_2}{(1 + r_1 + r_1r_2)^2} \quad (3.3)$$

Se comprueba la expresión anterior mediante la suma algébrica de las coordenadas baricéntricas absolutas de uno cualquiera de los vértices A,B o C en el propio triángulo  $Q_1Q_2Q_3$ ,

$$S_{Q_1Q_2Q_3} = S \frac{r_1(r_1 - r_2) + r_1(r_1r_2^2 - 1) + (1 - r_1r_2^2)}{(1 + r_1 + r_1r_2)^2}$$

o, también, mediante la suma de las coordenadas de uno cualquiera de los vértices del segundo triángulo ceviano  $Q'_1Q'_2Q'_3$  en el triángulo  $Q_1Q_2Q_3$ ,

$$\begin{aligned} S_{Q_1Q_2Q_3} &= S \frac{(r_1^2r_2 - 1)(r_1r_2^2 - 1) + r_1(r_1r_2^2 - 1)(r_2 - r_1) + (r_1^2r_2 - 1)(r_1 - r_2)}{(1 + r_1 + r_1r_2)^2(1 + r_2 + r_2r_1)} = \\ &= S \frac{r_1^3r_2^3 + r_1^2r_2^3 - r_1^3r_2^2 - r_1^2r_2^2 + r_1^3r_2 - r_1^2r_2 - r_1^2r_2 - r_1r_2 + r_2 + r_1^2 - r_1 + 1}{(1 + r_1 + r_1r_2)^2(1 + r_2 + r_2r_1)} = \\ &= S \frac{(1 + r_1^2r_2^2 + r_1^2 - r_1 - r_1r_2 - r_1^2r_2)(1 + r_2 + r_2r_1)}{(1 + r_1 + r_1r_2)^2(1 + r_2 + r_2r_1)} \end{aligned}$$

Asimismo, el área del triángulo  $Q'_1Q'_2Q'_3$  resulta de la operación mutatis mutandis de los parámetros  $r_1, r_2$ , o sea

$$S_{Q'_1Q'_2Q'_3} = S \frac{1 + r_2^2r_1^2 + r_2^2 - r_2r_1 - r_2 - r_2^2r_1}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2} \quad (3.4)$$

Una deducción alternativa de (3.3) y/o (3.4) es la siguiente forma determinante continuante del área en el caso particular de un triángulo ceviano, teniendo en cuenta la identificación cíclica de las ternas de coordenadas baricéntricas de los vértices,

$$\begin{aligned} S_{Q_1Q_2Q_3} &= S_{ABC}^{-1} \begin{vmatrix} s_{12} & s_{11} & 1 \\ s_{22} & s_{21} & 1 \\ s_{32} & s_{31} & 1 \end{vmatrix} = S_{ABC}^{-2} \begin{vmatrix} s_{12} & s_{32} & s_{12} + s_{22} + s_{32} \\ s_{22} & s_{12} & s_{12} + s_{22} + s_{32} \\ s_{32} & s_{22} & s_{12} + s_{22} + s_{32} \end{vmatrix} = S_{ABC}^{-2} \begin{vmatrix} s_{12} & s_{32} & s_{22} \\ s_{22} & s_{12} & s_{32} \\ s_{32} & s_{22} & s_{12} \end{vmatrix} = \\ &= S_{ABC}^{-2} (s_{12}^2 + s_{22}^2 + s_{32}^2 - 3s_{12}s_{22}s_{32}) = S_{ABC}^{-1} (s_{12}^2 + s_{22}^2 + s_{32}^2 - s_{12}s_{22} - s_{22}s_{32} - s_{32}s_{12}) \end{aligned}$$

efectivamente identificable con (3.3) y (3.4) para sus respectivos valores de las tres coordenadas baricéntricas comunes de sus tres vértices, en concreto, explícitamente, en la expresión anterior, las del vértice  $Q_2$ .

En segundo lugar, aplicando la expresión (1.5) a los lados del triángulo  $Q_1Q_2Q_3$ , se tienen,

$$\begin{cases} D_{Q_1Q_2}^2 = -\frac{1}{S^2(1 + r_1 + r_1r_2)^2} [(1 - r_1)(r_1 - r_1r_2)a^2 + (r_1r_2 - 1)(r_1 - r_1r_2)b^2 + (r_1r_2 - 1)(1 - r_1)c^2] \\ D_{Q_2Q_3}^2 = -\frac{1}{S^2(1 + r_1 + r_1r_2)^2} [(r_1 - r_1r_2)(r_1r_2 - 1)a^2 + (1 - r_1)(r_1r_2 - 1)b^2 + (1 - r_1)(r_1 - r_1r_2)c^2] \\ D_{Q_3Q_1}^2 = -\frac{1}{S^2(1 + r_1 + r_1r_2)^2} [(r_1r_2 - 1)(1 - r_1)a^2 + (r_1 - r_1r_2)(1 - r_1)b^2 + (r_1 - r_1r_2)(r_1r_2 - 1)c^2] \end{cases}$$

y sumando las tres igualdades

$$\begin{aligned}
L_{Q_1Q_2Q_3}^2 &= -L_{ABC}^2 \frac{(1-r_1)(r_1-r_1r_2) + (r_1-r_1r_2)(r_1r_2-1) + (r_1r_2-1)(1-r_1)}{(1+r_1+r_1r_2)^2} \\
&= L_{ABC}^2 \frac{1+r_1^2r_2^2+r_1^2-r_1r_2-r_1-r_1^2r_2}{(1+r_1+r_1r_2)^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

y la expresión análoga relativa al triángulo  $Q'_1Q'_2Q'_3$

$$L_{Q'_1Q'_2Q'_3}^2 = L_{ABC}^2 \frac{1+r_2^2r_1^2+r_2^2-r_1r_2-r_2-r_2^2r_1}{(1+r_2+r_2r_1)^2} \tag{3.6}$$

Observamos, de nuevo, que cualquiera de las expresiones (3.3) a (3.6) admite otras dos formas alternativas análogas, para cada selección de un par de variables en la terna  $r_1, r_2, r_3$ .

### 3.4.- El invariante ceviano

De la comparación de las expresiones (3.3) y (3.5), y/o de las expresiones (3.4) y (3.6), se concluye, por último, la siguiente triple invariancia (3.7), que se cumple con carácter universal en cualquier configuración ceviana, esto es, para una terna cualquiera  $r_1, r_2, r_3$  que satisface la condición (2.1), motivo de la denominación de invariante ceviano que hemos dado a la razón común  $I_c$ ,

$$I_c = \frac{S(ABC)}{L^2(ABC)} = \frac{S(Q_1Q_2Q_3)}{L^2(Q_1Q_2Q_3)} = \frac{S(Q'_1Q'_2Q'_3)}{L^2(Q'_1Q'_2Q'_3)} \tag{3.7}$$

y que reafirma la condición simétrica de la relación geométrica, proyectiva y métrica, existente entre los tres triángulos integrantes de la terna  $(ABC, Q_1Q_2Q_3, Q'_1Q'_2Q'_3)$ .

### 3.5.- El invariante baricéntrico

Un resultado directo de la coincidencia de ternas de las coordenadas baricéntricas de los tres vértices de un triángulo ceviano referidas al triángulo base, es el siguiente invariante posicional, igualmente universal, cuya comprobación analítica obviamos:

**Corolario:** Los centros de gravedad de los tres triángulos, un triángulo base y dos triángulos cevianos, asociados a la construcción indicada, son también coincidentes.

Las invariancias 3.4 y 3.5 reafirman la condición simétrica de la relación geométrica, proyectiva y métrica, existente entre los tres triángulos integrantes de la terna  $(ABC, Q_1Q_2Q_3, Q'_1Q'_2Q'_3)$ .