Número de SUDOKUS que pueden plantearse

Nomenclatura

Celdas : Cada una de las matrices cuadradas 3 x 3, que contienen los nueve dígitos de 1 a 9

Se nombran por un número **Celda 2, Celda 5, Celda 9,** según el número de orden en que va resolviéndose el número de posibilidades para la celda. De tal forma que una vez resuelta una celda, se supone rellena y así marca las limitaciones que correspondan a la siguiente celda.

Por lo que se verá más tarde, el orden escogido es éste

1	2	3
4	6	7
5	8	9

Filas : Son las filas de la matriz de cada celda. Se designan con la letra **F** afectada de doble subíndice. El primero indica el número de celda y el segundo el número de orden de la fila en la matriz de cada celda. Así

$\mathbf{F_{23}}$ es la fila 3ª de la Celda 2

Columnas : Son las columnas de las celdas. Se designan con la letra **C** afectada de doble subíndice. El primero para el número de celda y el segundo el número de orden de la columna dentro de la celda

$\mathbf{C_{41}}$ es la columna 1ª de la Celda 4

Casillas : Intersecciones de fila y columna que pueden ser ocupadas por un solo elemento

Formación de la Celda 1

Carece de limitación alguna y por tanto sus 9 elementos pueden ocupar cualquier casilla. En total el número de posibilidades para esta celda es $\underline{|9}$

Formación de la Celda 2

Existe en principio la forma directa, fácil de ver. Es posible ocupar la fila primera F_{21} con cualquiera de las ternas distintas de la contenida en F_{11}. Su número son las combinaciones $C_{6,\,3} = 20$.

Seguir por este camino, no ofrece una visión clara de cuales son las limitaciones que impone la existencia de esta primera fila. Es preferible contemplar la

Formación conjunta de las filas F_{21} y F_{22}

Suponemos ocupada la celda 1 por

$$a_i\, a_j\, a_k = \text{Conjunto (a)}$$
$$b_p\, b_q\, b_r = \text{Conjunto (b)}$$
$$c_x\, c_y\, c_z = \text{Conjunto (c)}$$

En que (i, j, k)=(p, q, r)=(x, y, z)=(1, 2, 3)

Nueve elementos 1 a 9 todos distintintos y en orden arbitrario

Escribimos ahora una secuencia de sentencias, de las que:

La primera es verdadera
Cada sentencia implica a la siguiente

En consecuencia

La última será verdadera

- La fila tercera de la celda 1, está ocupada por la terna (c) $\rightarrow$
- F_{23} no puede contener ningún elemento de (c) $\rightarrow$
- Los elementos de (c) están todos en la unión de las ternas de F_{21} y F_{22} $\rightarrow$
- Si F_{21} contiene una parte cualquiera de (c) , F_{22} debe contener la complementaria Formada una terna para F_{21} los elementos de (c) en F_{22} están obligados y por tanto no tienen más que una posibilidad

Si en cualquiera de las dos filas en estudio debe entrar un elemento de uno de los conjuntos (a), (b) o (c) tenemos tres posibilidades.
Igualmente si debemos tomar un par de elementos de estos conjuntos, las posibilidades son también tres.

Entre las posibles ternas que pueden entrar en F_{21} establecemos una clasificación, según el número de elementos de (c) que contenga

m=3,2,1,0 Para cada valor de m, las clases se designan por
nec1=m $\rightarrow$ número de elementos c=m, en F_{21}

Establecida esta clasificación, existe otra entre las ternas posibles para F_{22} a la que designamos como asociada a la anterior y que definimos como (nec2=3-m)

nec2=3-m $\rightarrow$ núm de elementos c=3-m, en F_{22}

Existe así un conjunto de pares de ternas F_{21} F_{22} , que pueden agruparse dos a dos, para conformar la celda 2. La tercera terna de la celda es la constituida por los tres elementos no utilizados en las anteriores
En la siguiente tabla se recogen el formato de las ternas de F_{21} y F_{22}, según la clase

a que pertenezcan y las posibilidades de cada terna

F_{21}			F_{22}		
nec1	formato	np1	nec2	formato	np2
3	$c_x\, c_y\, c_z$	1	0	$a_i\, a_j\, a_k$	1
2	$c_x\, c_y\, b_p$	3x3=9	1	$a_i\, a_j\, c_z$	3x1=3
1	$c_x\, b_p\, b_q$	3x3=9	2	$a_i\, c_y\, c_z$	3x1=3
0	$b_p\, b_q\, b_r$	1	3	$c_x\, c_y\, c_z$	8

Sumas 20 8

En primer lugar observamos que el número de ternas posibles para F_{21} es 20, como ya habíamos obtenido por el método directo

El número de ternas posibles para F_{22} es 8.

Cada terna de F_{21} no tiene ningún elemento común con cualquier terna de F_{22} excepto la $c_x\, c_y\, c_z$, que pertenece a ambos conjuntos de ternas. El número total de pares de celdas que pueden formarse con ambos conjuntos es

$$20 \times 8 - 1 = 159$$

La tercera terna F_{23} es única para cada par que haya entrado en F_{21} y F_{22}.

El número de formaciones para el conjunto de las tres ternas que pueden entrar en la Celda 2,

20 en F_{21} y 8 en F_{22} son

159

A partir de estas se obtienen más formaciones distintas de la celda, permutando los elementos de cada fila de todas las formas posibles.

Puesto que las celdas 4 y 8 están aún vacías, con hay peligro de coincidencia de elementos iguales en una columna. Pueden establecerse 6 permutaciones por fila.
El total de formaciones distintas para la celda 2 serán

$$159 \times 6^3 = 34344$$

<u>Formación de la celda 3</u>

Cada fila de la celda 3 tiene a su izquierda dos ternas en las celdas 1 y 2 ya ocupadas, la terna que puede entrar en esta fila tiene una sola posibilidad.
Como antes cada fila admite 6 permutaciones. En total

$$1 \times 6^3 = 216$$

<u>Formación de las celdas 4 y 5</u>

Partimos de que la celda 1, se completa de forma arbitraria con los 9 dígitos 1 a 9.

Las celdas 2 y 3 se han formado a partir de aquí, utilizando los razonamientos oportunos pero consideradas estas celdas como formadas por filas.

Podemos formar las celdas 4 y 5, con los mismos razonamientos, pero considerando que estas celdas están compuestas de columnas. Los resultados serían idénticos y por tanto existe una simetría con respecto a la diagonal principal.

Tendríamos hasta ahora el siguiente esquema de posibilidades

$\underline{\vert 9}$	34344	216
34344	Celda 6	Celda 7
216	Celda 8	Celda 9

<u>Formación de la celda 6</u>

Cuestión previa
Antes de continuar vamos a probar que:

Los formatos encontrados para las ternas de F_{12} son incompatibles con pertenecer a una misma columna de la <u>celda 2</u>

En la siguiente tabla se muestran los formatos colocados en forma de columna para todos los casos de ternas contenidas en una de las 56 posibilidades para la celda 2, según sea la clase a que pertenece la terna, en la clasificación antes definida, con las observaciones pertinentes. En la primera columna aparece una cualquiera de las $\underline{\vert 9}$ posibles formaciones de la celda 1 y en las siguientes los formatos para las ternas de F_{21} , en columna

Celda 1	nec1=3	nec1=2	nec1=1	nec1=0
$a_1\ a_2\ a_3$ $b_1\ b_2\ b_3$ $c_1\ c_2\ c_3$	c_x c_y c_z	c_x c_y b_p	b_p c_x b_q	b_p b_q b_r
Observaciones	(1)	(2)	(3)	(1)

(1) - Un elemento repite en segunda o tercera fila
(2) - No hay posibilidad de colocar el tercer elemento de (c) en la celda 2

(3) - No hay posibilidad de colocar el tercer elemento de (b) en la celda 2

Ninguna terna de las encontradas válidas para constituir $\mathbf{F_{21}}$ pueden pertenecer a una sola columna

Repitiendo el mismo razonamiento con rotación cíclica del trío a, b, c se llega a la conclusión de que tampoco ninguna terna de las que pueden entrar en $\mathbf{F_{22}}$ **o** $\mathbf{F_{23}}$ pueden entrar en una misma columna de la **Celda 2**

Por otra parte

La celda 6 tiene respecto a la celda 4 la misma disposición que la 2 respecto a la 1, por tanto antes de practicar cualquier permutación entre sus elementos tendrá **159 posibilidades** con trío de ternas que difieren en algún elemento.

Queda colocar los elementos de cada terna de forma que ninguno de ellos repita en la misma columna con los ya colocados en la celda 2.

Elegida una terna cualquiera de las contenidas en las 159 posibilidades de la celda 6, sus tres elementos están en la celda superior, la 2.

Los tres elementos de la terna no pueden estar en una columna de la celda 2, luego tendrá dos de sus elementos en una columna de la celda 2 y el tercero en otra. En tal caso la columna que contiene 2 elementos de la terna elegida, debe contener también al tercero en la misma columna en la celda 6: Los otros 2 elementos de la terna elegida pueden estar en cualquiera de las dos columnas restantes, por lo que habrá **2 posibilidades para trasposiciones** de los elementos de la terna.

También puede ser que la terna elegida en la celda 6 tenga un elemento en cada columna de la celda 2. En tal caso un elemento de la terna puede ocupar 2 columnas de la celda 6 (2 posibilidades) , los otros dos elementos de la terna tienen posición obligada. Igual que antes tendremos **2 posibilidades para trasposiciones** de los elementos de la terna.

Dos trasposiciones posibles por terna dan lugar a

$$159 \times 2^3 = 1272$$

Posibilidades para la Celda 6, después de efectuar las trasposiciones posibles

<u>Formación de la Celda 7</u>

Cada fila tiene a su izquierda 6 elementos ya colocados, los de las celdas 4 y 6 Luego hay una sola terna para cubrir cada fila.

Además la celda 7 tiene sobre ella la celda 3, ya completa y por tanto solo se permitirán 2 trasposiciones para los elementos de cada terna. Estamos en el caso de la celda 6, con una única posibilidad para las ternas de la celda.

El número de posibilidades de la celda será

$$1 \times 2^3 = 8$$

<u>Formación de Celda 8</u>

Si partimos de la celda 2 y hacemos el mismo razonamiento anterior volvemos a encontrarnos con la simetría respecto a la diagonal principal.

El número de posibilidades de la celda será también

8

<u>Formación de la celda 9</u>

Cada fila de esta celda tiene ya 6 elementos colocados, luego la terna es única

Elegida una fila cualquiera sus tres elementos está en las dos celdas superiores la, 3 y la 7 y en columna distinta en cada una de ellas. Cada elemento de esta fila se colocará en la única casilla no perteneciente a las columnas utilizadas.

Cada casilla puede ser ocupada por un solo elemento

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Resumiendo : El número de posibilidades para cada celda es

362880	34344	216
34344	1272	8
216	8	1

En total, el producto de todas estas posibilidades $1,6257 \times 10^{24}$