OPTIMIZACIÓN DE SUPERFICIES Y VOLÚMENES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

I.- Optimizaciones de superficies

El problema planteado inicialmente, generalizando el problema anterior en el artículo primero de referencia, relativo allí a una base cuadrada, es la optimización de la superficie lateral de un poliedro troncopiramidal recto, cuyas bases son polígonos regulares homotéticos directos, siendo datos fijados el área de una base *s* y el volumen *V*. El poliedro resulta inscrito en el volumen troncocónico de bases los respectivos círculos circunscritos a las dos bases poligonales.

En primer lugar, si las bases son polígonos regulares de *n* lados, llamamos:

l y *r*, longitudes respectivas del lado y radio de la base de área *s* fijada
L y *R*, longitudes respectivas del lado y radio de la base de área *S* no conocida
h, longitud de la mediana (altura) de las caras de la superficie lateral del poliedro que son trapecios isosceles iguales de bases *l* y *L*
H, la altura del poliedro, como una cualquiera de las tres magnitudes anteriores, *L, R o h,* segunda incógnita del problema.

Se cumplen las relaciones de base:

$$l = 2rsen\frac{\pi}{n}$$

$$s = \frac{1}{2}nr^2 sen\frac{2\pi}{n},$$

y llamaremos también

$$x = \frac{L}{l} = \frac{R}{r},$$

y como x es la razón de homotecia de las bases, se cumple también

$$x^2 = \frac{S}{s}.$$

El volumen del poliedro, aplicando la fórmula conocida del volumen de un prismatoide, se escribe, siendo s_m el área de la base media del mismo,

$$V = \frac{1}{6}H(s + S + 4s_m) = \frac{1}{6}Hs\left[1 + x^2 + 4\left(\frac{1+x}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{3}Hs(x^2 + x + 1).$$

La superficie lateral se escribe

$$S_T = nh\frac{l+L}{2} = \frac{1}{2}nhl(1+x),$$

con

$$h^2 = H^2 + \left[(R-r)\cos\frac{\pi}{n}\right]^2 = H^2 + r^2(x-1)^2\cos^2\frac{\pi}{n} = H^2 + \frac{s}{n}(x-1)^2\cot g\frac{\pi}{n}.$$

La función objetivo S_T^2 resulta

$$S_T^2 = \frac{n^2l^2}{4}\left[\frac{9V^2}{s^2(x^2+x+1)^2} + \frac{s}{n}(x-1)^2\cot g\frac{\pi}{n}\right](x+1)^2$$

Anulando la derivada respecto de la variable x, resulta la ecuación

$$f(x,n) = (x-1)(x^2+x+1)^3 - (x+2)\alpha(n) = 0,$$

con

$$\alpha(n) = \frac{9V^2}{2s^3} ntg\frac{\pi}{n}.$$

Tiene además interés considerar los intervalos de variación de la variable x y del factor del parámetro $\alpha(n)$ que depende del número entero n, $\beta(n) = ntg\frac{\pi}{n}$.

En primer lugar el valor de x se situa en el intervalo semiabierto $0 \leq x < \infty$, correspondiendo el valor inferior $x = 0$ a la configuración piramidal. Los valores negativos de x corresponderían a poliedros no convexos cuyo sentido físico no nos interesa para las configuraciones que analizamos.

La función de variable entera $\beta(n)$ para valores $n \geq 3$ es decreciente para valores crecientes de n y su valor se situa en el intervalo semiabierto $3\sqrt{3} \geq \beta(n) > \pi$.

Por otro lado, de la forma de esta ecuación se deducen las dos propiedades siguientes:

1) La condición de raíz x positiva requiere $x > 1$.
2) Las funciones $f(x,n)$ tienen puntos de inflexión para valores comunes de x.

Más concretamente, la naturaleza de las raíces de la ecuación se estudia a partir de la representación gráfica de la curva

$$y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)^3}{x+2}.$$

$$y' = \frac{3(x^2+x+1)^3 + 3(x+2)(x-1)(2x+1)(x^2+x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{3(2x^3+4x^2-2x-1)(x^2+x+1)^2}{(x+2)^2}$$

1º) Intersecciones con los ejes y pendientes:

Con $x = 0$: $(0,-\frac{1}{2}), y'(0) = -\frac{3}{4}$

Con $y = 0$: $(1,0), y'(1) = 9$.

2º) Asíntota paralela al eje $x = 0$: $x = -2$

Posición respecto de la asíntota: $x = -2+\varepsilon \to y = -\frac{9}{\varepsilon} \approx -\infty; x = -2-\varepsilon \to y = \frac{9}{\varepsilon} \approx +\infty$

No existen intersecciones reales con $x = -2$

3º) Extremos: $y' = 0 \to 2x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0$

La naturaleza de las raíces de esta ecuación se estudia, a su vez, mediante representación gráfica de la curva

$$z = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 1$$
$$z' = 6x^2 + 8x - 2$$
$$z'' = 12x + 8$$

3.1) Intersección con $x = 0$: $(0,-1), z'(0) = -2$

3.2) Extremos

$$3x^2 + 4x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{3}\left[-2 \pm \sqrt{7}\right] = \begin{cases} x_1 = +0{,}13, z_1 = -2, z_1'' > 0, mín \\ x_2 = -1{,}53, z_2 = +4{,}28, z_2'' < 0, máx \end{cases}$$

3.3) Inflexión

$$12x + 8 = 0 \to x = -0{,}67, z = 1{,}36, z' = -4{,}68$$

3.3) Rama parabólica de grado 3

Posición: $x \approx +\infty \to z \approx +\infty, x \approx -\infty \to y \approx +\infty$

De la representación de estos datos se deduce que la ecuación $y' = 0$ tiene una única raíz real positiva, en el intervalo $(0,1)$, y dos raíces negativas en los intervalos respectivos

$(-0{,}67,-1{,}53)$ y $(-1{,}53,-\infty)$.

Aplicando el método de Newton se obtienen los siguientes extremos de y

$(0{,}66, -0{,}55),\ y'' > 0,\ mínimo$

$(-0{,}33, -0{,}48),\ y'' < 0,\ máximo$

$(-2{,}33, +169),\ y'' > 0,,\ mínimo$

La representación de la función y, que omitimos por no disponer de capacidad gráfica mecanizada, es inmediata a partir de estos resultados. Aunque nuestro interés está circunscrito a valores $\alpha(n) > 0, x > 1$, incluímos la siguiente tabla de la naturaleza de las raíces de la ecuación $f(x,n) = 0$, como sustitutiva de la gráfica de la función y:

$\alpha(n)$	$\rightarrow$ *Raíces*: < 0	0	> 0
$-\infty < \alpha(n) < -0{,}55$	$1(-2 < x < -0{,}48)$		
$\alpha(n) = -0{,}55$	$1(-2 < x < -0{,}48)$		$2(x = +0{,}66\, doble)$
$-0{,}55 < \alpha(n) < -0{,}50$	$1(-2 < x < -0{,}33)$		$2(0 < x_1 < 0{,}66; 0{,}66 < x_2 < 1)$
$\alpha(n) = -0{,}50$	$1(-2 < x < -0{,}33)$	1	$1(0{,}66 < x < 1$
$-0{,}50 < \alpha(n) < -0{,}48$	$2(-2 < x < -0{,}33; -0{,}33 < x < 0)$		$1(0{,}66 < x < 1)$
$\alpha(n) = -0{,}48$	$2(x = -0{,}33\ doble)$		$1(0{,}66 < x < 1)$
$-0{,}48 < \alpha(n) < 0$			$1(0{,}66 < x < 1)$
$\alpha(n) = 0$			$1(x = 1)$
$0 < \alpha(n) < 169$			$1(1 < x < +\infty)$
$\alpha(n) = 169$	$2(x = -2{,}33\, doble)$		$1(1 < x < +\infty)$
$\alpha(n) > 169$	$2(-\infty < x < -2{,}33), -2{,}33 < x < -2)$		$1(1 < x < +\infty)$

Puesto que para cualquier valor de $\alpha(n)$ sólo existe una raíz positiva de la ecuación $f(x,n) = 0$, se deduce también que la gráfica de la función $f(x,n)$ en el primer cuadrante, es una rama parabólica de grado 7. Las dos primeras derivadas se escriben

$$f'(x,n) = (7x^2 - 2x - 2)(x^2 + x + 1)^2 - \alpha(n)$$

$$f''(x,n) = (x^2 + x + 1)\left[(14x - 2)(x^2 + x + 1) + 2(7x^2 - 2x - 2)(2x + 1)\right] =$$

$$= (x^2 + x + 1)(56x^3 + 18x^2 - 2).$$

Los puntos de inflexión reales resultan de la ecuación en forma reducida

$$(\frac{1}{x})^3 - 9\frac{1}{x} - 28 = 0,$$

cuyo discriminante tiene el valor

$$\Delta = 4(-9)^3 + 27(-28)^2 > 0,$$

luego existe una sola inflexión real situada en el intervalo $0 < x < 1$, con ordenada negativa, y, por ello, fuera de nuestro interés.

En el significado físico del problema tiene sentido únicamente la raíz positiva para valores positivos de $\alpha(n)$. Puesto que la función derivada $f'(x,n)$ se mantiene positiva creciente en $x < 1$, para obtención de la raíz positiva, resulta adecuada la aplicación del método de Newton, esto es, mediante la iteración

$$x_{h+1} = x_h - \frac{f(x_h, n)}{f'_x(x_h, n)},$$

siendo conveniente iniciar la recurrencia por un valor x_1 que cumpla $f(x,n) > 0$.

En el ejemplo propuesto, para valores $s = 25m^2, V = 125m^3$, esto es, con $V^2 = s^3$, el valor del parámetro $\alpha(n)$ se situa en el intervalo

$$14{,}13 \le \alpha(n) < 23{,}35,$$

y un posible valor inicial x_1, para cualquier valor de n, sería $x = 2$.
Aplicando el método de Newton se obtienen los resultados siguientes

n	$l(m)$	$r(m)$	x	$L(m)$	$R(m)$	$H(m)$	$S_T(m^2)$
3	8,22	4,75	1,80	14,79	9,22	2,48	98,81
4	5,00	3,55	1,54	7,69	6,46	3,06	84,81
6	3,12	3,12	1,51	5,02	5,02	3,54	79,60
∞		2,83	1,48		4,17	3,62	77,02

La función $S_T(n)$ es decreciente para valores crecientes de *n*, con el mínimo absoluto asintótico para $n \to \infty$, y se comprueba, en definitiva, la conclusión, por otro lado previsible, de que el mínimo de la familia ampliada, que como decimos incluye a la considerada inicialmente, corresponde, en el límite, a las bases circulares y por tanto a una configuración geométrica troncocónica. La economía sobre la solución óptima de base cuadrada es del $8{,}3\%_0$. Además si se plantea el problema inicialmente sobre esta última configuración troncocónica de base inferior fijada, siendo las variables el radio de la base superior abierta y la altura, el óptimo obtenido será naturalmente el mismo, pues la ecuación resolvente es la misma anterior, referida al parámetro $\alpha(n)$, con

$$\alpha(\infty) = \frac{9\pi}{2} \times \frac{V^2}{s^3}; x = \frac{R}{r}.$$

Una ventaja añadida es la obtención de valores igualmente decrecientes para las superficies proyección en planta del óptimo, que son proporcionales a los respectivos valores x^2.

Sin embargo la cuestión teórica matemática no queda totalmente resuelta, pues pueden considerarse otras configuraciones. Las más próximas a la analizada serían prismatoides rectos cualesquiera, de bases paralelas con caras poligonales no homotéticas directas, como es el ejemplo relativo a una optimización volumétrica, que comentamos en la sección **II** de este escrito.
En el mismo artículo arriba citado, se apuntaba ya también algún esbozo de intención sobre posibles superficies óptimas curvas, como ha resultado ser, finalmente, la solución troncocónica recta de base circular.

El esquema de superficie lateral curvada es obligado para formas planares distintas en una y otra base, si una de ellas no es un polígono, o si no lo son ambas. Por ejemplo si la base inferior es un cuadrado y la base abierta superior fuera una circunferencia con el mismo eje central. En este último caso la superficie lateral más conveniente, en ambos aspectos, del cálculo y de su realización física, compuesta a su vez por otras cuatro idénticas pero diferentes, resultado de tres giros sucesivos de 90º de una de ellas, sería una superficie reglada no desarrollable. Como indicamos a continuación, la definición de la superficie, en este caso concreto, como decimos, necesariamente no desarrollable, no ofrece dificultad, así como la formulación del volumen constante, pero la formulación de la función objetivo, la superficie lateral, hace las ecuaciones inmanejables incluso en este caso de geometría relativamente sencilla.
Las ecuaciones de la recta generatriz de la superficie reglada que representa $1/4$ de la superficie total, haciendo corresponder los puntos sobre el lado de la base inferior y en la circunferencia base superior, cuyos vectores desde los centros respectivos son paralelos, definidos por el ángulo φ común, se escriben

$$\frac{x - l/2}{R\cos\varphi - l/2} = \frac{y - l/2 \times tg\varphi}{Rsen\varphi - l/2 \times tg\varphi} = \frac{z}{H},$$

o bien, la ecuación de la superficie en las coordenadas paramétricas φ, z, definida por el vector $\overline{\rho}\{x, y, z\} = \overline{a}(\varphi) + z\overline{b}(\varphi)$, con

$$x = l/2 + \frac{z}{H}(R\cos\varphi - l/2)$$

$$y = l/2 \times tg\varphi + \frac{z}{H}(Rsen\varphi - l/2 \times tg\varphi).$$

La dirección de la normal al plano tangente en el punto (φ, z) está dada por el producto vectorial $\overline{\rho'_\varphi} \wedge \overline{\rho'_z}$,

$$\left\{ \begin{vmatrix} \frac{l}{2\cos^2\varphi} + \frac{z}{H}(R\cos\varphi - \frac{l}{2\cos^2\varphi}) & 0 \\ \frac{Rsen\varphi - l/2 \times tg\varphi}{H} & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{z}{H}(-Rsen\varphi) & 0 \\ \frac{R\cos\varphi - l/2}{H} & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{z}{H}(-Rsen\varphi) & \frac{l}{2\cos^2\varphi} + \frac{z}{H}(R\cos\varphi - \frac{l}{2\cos^2\varphi}) \\ \frac{R\cos\varphi - l/2}{H} & \frac{Rsen\varphi - l/2 \times tg\varphi}{H} \end{vmatrix} \right.$$

o sea

$$\left\{ \frac{l}{2\cos^2\varphi} + \frac{z}{H}(R\cos\varphi - \frac{l}{2\cos^2\varphi}), -\frac{z}{H}Rsen\varphi, \frac{l(R\cos\varphi - l/2)}{2H\cos^2\varphi} + \frac{z}{H^2}(-R^2 + \frac{Rl}{2}\frac{sen^2\varphi + 1}{\cos\varphi} - \frac{l^2}{4\cos^2\varphi}) \right\},$$

que no cumple la condición de superficie desarrollable, ya que

$$\overline{\rho}.(\overline{a'_\varphi} \wedge \overline{\rho'_\varphi}) = \{x, y, z\}.\left\{0, 0, \frac{lzsen\varphi}{2H\cos^2\varphi}\right\} = \frac{lz^2 sen\varphi}{2H\cos^2\varphi} \neq 0.$$

Esta comprobación resulta, por otro lado, superflua, puesto que sólo se puede elegir un par de puntos en los perímetros superior e inferior cuyas respectivas tangentes en cada plano sean además coplanarias, es decir el punto en el perímetro circular es el punto de tangente paralela al lado del cuadrado en la base cuadrada, que es tangente común para cualquier punto de ese mismo lado.

La condición de volumen fijado se expresa, siendo ρ el módulo del vector $\overline{\rho}$

$$V = 8\int_0^H \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\rho^2 \delta\varphi\delta z = 4\int_0^H \delta z \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{l^2}{4\cos^2\varphi} + \frac{lz}{H}(\frac{R}{\cos\varphi} - \frac{l}{2\cos^2\varphi}) + \frac{z^2}{H^2}(R^2 - \frac{Rl}{\cos\varphi} + \frac{l^2}{4\cos^2\varphi}) \right] \delta\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \delta\varphi \left[(z + \frac{z^3}{3H^2})\frac{l^2}{4\cos^2\varphi} + \frac{lz^2}{2H}(\frac{R}{\cos\varphi} - \frac{l}{2\cos^2\varphi}) + \frac{z^3}{3H^2}(R^2 - \frac{Rl}{\cos\varphi}) \right]_0^H =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{HR^2}{3} + \frac{lHR}{6\cos\varphi} + \frac{l^2 H}{12\cos^2\varphi} \right] \delta\varphi = 4\left[\frac{HR^2}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{lHR}{6}(-\log_e tg\frac{\varphi}{2})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{l^2 H}{12} tg\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right] =$$

$$= \frac{H}{3}\left[\pi R^2 + 2lR\log_e(\sqrt{2} + 1) + l^2\right].$$

Una comprobación parcial sencilla de este resultado es su aplicación en ambos casos particulares $l = 0$ y $R = 0$, en los cuales los sólidos engendrados son respectivamente un cono y una pirámide de base cuadrada.

Como en el análisis anterior de la forma prismatoide regular, la expresión obtenida permite la eliminación directa de la variable H en función de la segunda variable R. Sin embargo la forma de la función objetivo, esto es, la superficie lateral, cuya diferencial está dada por

$$\delta S = \left| \frac{\delta\overline{\rho}}{\delta\varphi} \wedge \frac{\delta\overline{\rho}}{\delta z} \right|_+ \delta\varphi.\delta z,$$

nos lleva ahora a ecuaciones inmanejables como indicábamos en el artículo de referencia.

Hay todavía una salida analítica del problema, que la intuición nos hace creer definitiva, y es la familia de superficies de revolución construidas sobre la base circular, a la que pertenece también el esquema troncocónico circular recto, que supone hasta ahora nuestro óptimo

actual. Debemos advertir ya, sin embargo, que este planteamiento implica un grado de libertad adicional del problema.
La aplicación del cálculo variacional integral, en concreto la ecuación de Euler-Lagrange, con las mismas restricciones de base inferior circular y de volumen dados, combinado, por esta segunda condición, con el método del multiplicador de Lagrange, permite, en efecto, la formulación de una ecuación diferencial cuya solución de la curva meridiana generatriz de la superficie, se obtiene en forma paramétrica explícita para la variable radio de la sección normal al eje, pero como forma integral no explícita para la variable altura de dicha sección.
Se tiene, al efecto, definiendo esta curva por la función $\rho(z)$, con $\rho(0) = r$

$$V = \int_0^H \pi\rho^2 \delta z$$

y, siendo $\delta\sigma$ el elemento diferencial de longitud de la curva,

$$S_T = \int_0^H 2\pi\rho.\delta\sigma = 2\pi\int_0^H \rho(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}}.\delta z.$$

El método de Lagrange da la siguiente función objetivo, incluído el término penalty

$$\Phi(z,H) = 2\pi\int_0^H \rho(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}}.\delta z + \lambda(\int_0^H \pi\rho^2.\delta z - V).$$

Aplicando a la expresión anterior la condición de mínimo respecto de la variable H

$$\frac{\delta\Phi}{\delta H} = 0,$$

además de la fórmula variacional extremal de Euler-Lagrange respecto de la variable z de integración, siendo $\Gamma(\rho,\rho_z')$ la función bajo el signo integral

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho} - \frac{d}{dz}\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho_z'} = 0,$$

se obtienen respectivamente

$$2\rho(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda\rho^2 = 0$$

$$2(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}} + 2\lambda\rho - 2\frac{d}{dz}\left[\rho\rho_z'(1+\rho_z'^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0,$$

o bien

$$(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}} - (\rho\rho_{z,z}'' + \rho_z'^2)(1+\rho_z'^2)^{-\frac{1}{2}} + \rho\rho_z'^2\rho_{z,z}''(1+\rho_z'^2)^{-\frac{3}{2}} + \lambda\rho = 0,$$

y sustituyendo el parámetro λ de la primera expresión, queda la ecuación diferencial

$$(1+\rho_z'^2)(1+2\rho_z'^2) + \rho\rho_{z,z}'' = 0.$$

La ecuación se resuelve haciendo el cambio $p = \rho_z'$, quedando así en la forma directamente integrable

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{p\delta p}{(1+p^2)(1+2p^2)} = -\frac{p\delta p}{1+p^2} + \frac{2p\delta p}{1+2p^2},$$

que da la forma paramétrica explícita de la variable ρ

$$\rho = c(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}(1+2p^2)^{\frac{1}{2}} = c\left(\frac{1+2p^2}{1+p^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La variable z requiere la integración de

$$\delta z = \frac{\delta\rho}{p} = -\frac{c\delta p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}(1+2p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

expresión que, como señálabamos en nuestra opinión en *La Voz* no tiene una forma integrada explícita.

La constante c y la incógnita H, deben determinarse aplicando las dos condiciones establecidas, esto es, $\rho(z=0)=r$ y la expresión del volumen ya escrita, que toma la forma integral no explícita

$$V=\int_{p(z=H)}^{p(z=0)}\pi c^3\frac{(1+2p^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}\delta p$$

La misma limitación la encontramos para la obtención de una expresión explícita de la superficie lateral, que tiene la forma integral

$$S_T=2\pi c^2\int_{p(z=H)}^{p(z=0)}\frac{\delta p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por otro lado el resultado es una familia de curvas dependiente de un parámetro que representa la segunda constante de integración de la variable z, lo que supondría además una segunda optimización respecto de dicho parámetro.
En resumen, la complejidad de estos resultados requeriría, como decíamos, recursos muy importantes de computación para su aplicación numérica.

Un nuevo ejercicio afín, más simple que el anterior, al poder prescindir del término penalti que introduce el multiplicador de Lagrange en la definición de la función objetivo, es el planteamiento de superficie mínima de revolución de bases circulares y altura fijadas.
La función optimizante se escribe

$$S_T=2\pi\int_0^H\rho(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}}\delta z,$$

siendo ahora conocido el límite superior H.
Aplicando directamente la fórmula de Euler-Lagrange, resulta

$$(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{d}{dz}\left[\rho\rho_z'(1+\rho_z'^2)^{-\frac{1}{2}}\right]=0,$$

o sea

$$(1+\rho_z'^2)^{\frac{1}{2}}-\rho_z'^2(1+\rho_z'^2)^{-\frac{1}{2}}-\rho\rho_{z,z}''(1+\rho_z'^2)^{-\frac{1}{2}}+\rho\rho_z'^2\rho_{z,z}''(1+\rho_z'^2)^{-\frac{3}{2}}=0,$$

y también

$$1+\rho_z'^2-\rho\rho_{z,z}''=0$$

que se integra haciendo nuevamente el cambio $\rho_z'=p$

$$1+p^2-\rho p\frac{\delta p}{\delta\rho}=0,$$

obteniéndose así, en primer término

$$c_1\rho=(1+p^2)^{\frac{1}{2}},$$

o también

$$p=\frac{\delta\rho}{\delta z}=\left(c_1^2\rho^2-1\right)^{\frac{1}{2}},$$

luego resulta la ecuación cartesiana

$$\rho=\frac{1}{c_1}ch(c_1z+c_2).$$

Las constantes c_1 y c_2 se obtienen sustituyendo ambos puntos $(r,0)$ y (R,H), o sea

$$z=0,\rho=r\rightarrow rc_1=ch\,c_2$$
$$z=H,\rho=R\rightarrow Rc_1=ch(Hc_1+c_2),$$

lo que conduce a la siguiente ecuación trascendente en c_1

$$c_1H = \arg ch(c_1R) - \arg ch(c_1r).$$

o también

$$ch(c_1H) = rRc_1^2 + (R^2c_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(r^2c_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Una observación curiosa es el resultado para la curva generatriz, de una catenaria de eje la recta $z = -c_2c_1^{-1}$ y vértice $(c_1^{-1}, -c_2c_1^{-1})$, la cual, una vez obtenida, no nos ha causado ninguna extrañeza pues esta última curva tiene un papel relevante, como es bien sabido, en muchos otros fenómenos físicos.
Las expresiones de la superficie y volumen engendrados son respectivamente

$$V = \int_0^H \pi \frac{1}{c_1^2} ch^2(c_1z + c_2)\delta z = \frac{\pi}{2c_1^3}\left[c_1H + \frac{1}{2}sh2(c_1H + c_2) - \frac{1}{2}sh2c_2\right],$$

$$S_T = 2\pi\int_0^H \frac{1}{c_1} ch(c_1z + c_2).(1 + sh^2c_1)^{\frac{1}{2}}\delta z = 2\pi\int_0^H \frac{1}{c_1} ch^2(c_1z + c_2),$$

cumpliéndose, por tanto, la siguiente relación interesante para la familia de curvas soluciones óptimas

$$S_T = 2c_1V.$$

II.- Optimizaciones volumétricas

Me refiero, por último, a la siguiente optimización volumétrica, que está igualmente en la línea del tema aquí tratado: la posición de volumen máximo del poliedro envolvente de un trípode topográfico de plataforma triangular equilátera y patas triángulos isósceles cuyos ejes respectivos de giro son los tres lados del triángulo anterior. En la disposición óptima el poliedro es un prismatoide recto: la base superior dato es un triángulo equilátero, la base inferior, incógnita del problema, es también un triángulo equilátero homotético inverso del anterior, y las caras laterales se dividen en dos grupos diferentes de tres triángulos isósceles, los de un grupo conocidos, las patas, y los del otro de dos lados iguales conocidos y base variable.

El volumen del prismatoide, utilizando las mismas notaciones anteriores, se escribe

$$V = \frac{1}{6}H\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 + 4[\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 + 3\frac{9l}{8}(R - \frac{1}{2}r) + 3\frac{L}{8}(\frac{1}{2}R - r)]\right],$$

o bien

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}Hr^2(x+1)^2.$$

Llamando h a la altura de los triángulos isósceles dato, la variable H cumple la condición

$$H^2 = h^2 - (R - \frac{1}{2}r)^2 = h^2 - \frac{1}{4}r^2(2x-1)^2,$$

luego la función optimizante, en forma racional se escribe

$$\Phi = V^2 = \frac{3}{64}r^6(x+1)^4\left[4h^2 - r^2(2x-1)^2\right].$$

La condición extremal $\Phi'_x = 0$, llamando $u = \dfrac{h}{r}$, da finalmente la siguiente ecuación resolvente de segundo grado

$$4h^2 - (2x-1)^2 - r^2(x+1)(2x-1) = 0,$$

o sea

$$6x^2 - 3x - 4u^2 = 0,$$

que da la solución, tomando la raíz positiva

$$x = \frac{1}{12}(3 + \sqrt{9 + 96u^2}).$$

El problema tiene una generalización análoga al considerado en la optimización anterior de superficies, siendo las bases polígonos regulares de n lados, homotéticos inversos. El poliedro, en este caso, resulta igualmente inscrito en el volumen troncocónico de bases los respectivos círculos circunscritos a las dos bases poligonales, resultando las expresiones siguientes

$$V = \frac{1}{3}Hr^2(x^2\cos\frac{\pi}{n} + x + \cos\frac{\pi}{n})$$

$$H^2 = h^2 - (R - r\cos\frac{\pi}{n})^2,$$

y la función optimizante

$$\Phi = V^2 = \frac{1}{9}r^6(x^2\cos\frac{\pi}{n} + x + \cos\frac{\pi}{n})^2\left[u^2 - (x - \cos\frac{\pi}{n})^2\right],$$

que da la ecuación resolvente, de tercer grado ahora, para valores $n > 3$

$$(2x\cos\frac{\pi}{n} + 1)\left[u^2 - (x - \cos\frac{\pi}{n})^2\right] - (x^2\cos\frac{\pi}{n} + x + \cos\frac{\pi}{n})(x - \cos\frac{\pi}{n}) = 0.$$

o bien

$$3x^3\cos\frac{\pi}{n} + x^2(2 - 5\cos^2\frac{\pi}{n}) - 2x\cos\frac{\pi}{n}sen^2\frac{\pi}{n} - u^2(2x\cos\frac{\pi}{n} + 1) = 0,$$

Tiene interés la observación de que la ecuación resolvente es de grado tercero para valores $n > 3$, y únicamente de grado dos, para $n = 3$, como se ha deducido en primer término, pues en este único caso el coeficiente de u^2 es también un factor del polinomio de grado 3 que no depende de u.

Tiene también interés, analizar, al efecto, la naturaleza de las raíces de esta ecuación, mediante representación de la curva

$$y = u^2 = \frac{x\left[3x^2\cos\frac{\pi}{n} + x(2 - 5\cos^2\frac{\pi}{n}) - 2\cos\frac{\pi}{n}sen^2\frac{\pi}{n}\right]}{2x\cos\frac{\pi}{n} + 1}.$$

1.- Intersecciones con los ejes y pendientes (signadas):

$$(0,0), y'(0) < 0$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{n},0)\right), y'\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) > 0$$

$$\left(-\frac{2sen^2\frac{\pi}{n}}{3\cos\frac{\pi}{n}},0\right), y' > 0$$

2.- Asíntota paralela al eje OX: $x = -\dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}$

Posición respecto de la asíntota: $x = -\dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}} + \varepsilon, y \to -\infty; x = -\dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}} - \varepsilon, y \to +\infty$

3.- Rama parabólica: $y \approx \dfrac{3}{2}x^2; x \to +\infty, y \to +\infty; x \to -\infty, y \to +\infty$

4.- Extremos:

$$\left(2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(9x^2\cos\frac{\pi}{n}+2x(2-5\cos^2\frac{\pi}{n})-2\cos\frac{\pi}{n}sen^2\frac{\pi}{n}\right)-$$
$$-\left(3x^3\cos\frac{\pi}{n}+x^2(2-5\cos^2\frac{\pi}{n})-2x\cos\frac{\pi}{n}sen^2\frac{\pi}{n}\right)2\cos\frac{\pi}{n}=0,$$
$$12x^3\cos^2\frac{\pi}{n}+x^2\left(13-30\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}+2x\left(2-5\cos^2\frac{\pi}{n}\right)-2\cos\frac{\pi}{n}sen^2\frac{\pi}{n}=0$$
$$\cos\frac{\pi}{n}>0\rightarrow 3\,raíces\,reales: x>0, y<0; x<0, y>0; x<0, y>0.$$

De los resultados anteriores se deduce que la gráfica de la función en el primer cuadrante, que centra nuestro interés, es una rama parabólica de grado dos a la que corresponde una raíz positiva para valores positivos de y, con $x>\cos\frac{\pi}{n}$, que da el máximo buscado.

Finalmente, como segundo caso particular, además del planteamiento inicial para $n=3$, consideraremos el poliedro límite para valores crecientes de n, esto es, el volumen máximo de un tronco de cono de base y generatriz conocidas, que da el resultado

$$V=\frac{1}{3}Hr^2(x^2+x+1),$$

con

$$H^2=g^2-r^2(x-1)^2,$$

donde x es, nuevamente, la raíz positiva de la ecuación

$$3x^3-3x^2-u^2(2x+1)=0,$$

Debemos estudiar, al efecto, la naturaleza de las raíces de esta ecuación, mediante representación de la curva

$$y=u^2=\frac{3(x^3-x^2)}{2x+1}.$$

1.- Intersecciones con los ejes y pendientes: $(0,0), doble, y'=0; (1,0), y'=1$

2.- Asíntota paralela al eje OX: $x=-\frac{1}{2}$

Posición respecto de la asíntota: $x=-\frac{1}{2}+\varepsilon, y\rightarrow+\infty; x=-\frac{1}{2}-\varepsilon, y\rightarrow-\infty$

3.- Rama parabólica: $y\approx\frac{3}{2}x^2; x\rightarrow+\infty, y\rightarrow+\infty; x\rightarrow-\infty, y\rightarrow-\infty$

4.- Extremos:

$$y'=0\rightarrow(2x+1)(3x^2-2x)-2(x^3-x^2)=0\rightarrow 4x^3+x^2-2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0, máx\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{32}}{8}=\begin{cases}+0{,}58, mín\\ -0{,}83, mín\end{cases}\end{cases}$$

La representación en el primer cuadrante es, como en el caso general, una rama parabólica de grado 2, a la que corresponde la raíz positiva, situada en el intervalo abierto $x>1$, siéndole aplicable de nuevo el método iterativo de Newton.