PROBLEMAS RETICULARES N-DIMENSIONALES DE FILIACIONES CUADRICULAR Y/O RECTANGULAR

1.- Un problema cuadricular en el plano

El brillante divulgador matemático Martin Gardner en su publicación *Carnaval Matemático, p.124* (Alianza Editorial, Madrid, 1980, **Ref.[1]**) mencionaba que "en cualquier cuadrado de n^2 celdas, el número de rectángulos es $\frac{(n^2+n)^2}{4}$ y de ellos $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ son cuadrados", sin incluír su demostración.

El problema de la determinación del número de cuadrados que pueden dibujarse en una cuadrícula perfecta de dimensiones $n \times n$, cuya solución está dada por la segunda expresión anterior, ha sido objeto de dos comunicaciones propias en *La Voz del Colegiado* del CICCP (**Refs.[2]**, **[3](I)** y **[3](II)**), en las que se justificaba esta expresión por un procedimiento de deducción directa en la **Ref.[2]**, y mediante interpretación de una simple representación gráfica cuadricular del problema en la **Ref.[3](I)**, continuando y completando la deducción anterior, dada por otro colegiado mediante la aplicación del método de inducción (**Ref.[4]**). La misma justificación deductiva ha sido comentada también por otro colegiado en la **Ref.[5]**.

La división de la **Ref.[3]** en dos partes estuvo motivada en la consideración adicional de dos nuevas ampliaciones del problema bidimensional planteado inicial, relativamente sencillo, por un lado, al cálculo de la superficie total de la solución del citado número de cuadrados, que no son de dimensión uniforme (el lado), en la primera parte **[3](I)**, y, por otro a la extensión de las dos cuestiones planas resueltas, esto es, número de cuadrados y superficie total, a cualquier espacio multidimensional, lo que ha sido el objeto específico de la **Ref.[3](II)**.

La exposición a continuación, es, en primer lugar, una nueva versión unificada de las tres Opiniones anteriores citadas, que supone un enfoque superior amplíado de los planteamientos y desarrollos en el terreno estrictamente matemático.

En segundo lugar, este documento se completa con el análisis del problema, más general, relativo a la demostración de la primera expresión citada por Martin Gardner en (**[1]**), esto es, la determinación del número de rectángulos que pueden dibujarse en una retícula plana, rectangular, como más general, o cuadricular, como caso particular, así como la determinación de la superficie global del número de rectángulos, y, particularmente, cuadrados. Como continuación de los desarrollos indicados, y siguiendo la línea de la exposición en la **Ref.[3](II)**, se incluye, igualmente, la generalización de ambas cuestiones, número de elementos de filiación rectangular y cálculo del hipervolumen total en una retícula multidimensional de la misma naturaleza.

Se añaden, finalmente, diversas consideraciones sobre la aplicación de las fórmulas sumatorias de Bernouilli y la basada en las diferencias finitas, a los resultados anteriormente obtenidos, incluída la deducción de una formulación específica en la que resultan relacionadas las dos fórmulas sumatorias.

1.1.- El número de cuadrados

1.1a.- Los métodos inductivo y deductivo

En primer lugar, la justificación dada en **[4]** de la solución **(I)** se basó en la comprobación, algo farragosa, mediante el método de inducción directa, de la siguiente fórmula recurrente

$$N(i+1)-N(i)=(i+1)^2\,,N(1)=1,\ \textbf{(I)}$$

cuya integración, que resulta inmediata, da directamente la solución $N(n)=\sum_{i=1}^{i=n} i^2$.

En el razonamiento deductivo, más simple, se consideran todas las posiciones posibles del cuadrado de lado *s*, con $1\le s\le n$, que se obtienen mediante sendas traslaciones en ambas direcciones ortogonales, siendo el número de traslaciones en cada dirección $n-s+1$. Se obtiene por tanto

$$N_C(n,n)=\sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1)^2\,,$$

o bien, haciendo el cambio de índices dado por $r+s=n+1$, en el que *r* y *s* tienen el mismo campo de variación, $(1,..,n)$, si bien en orden inverso,

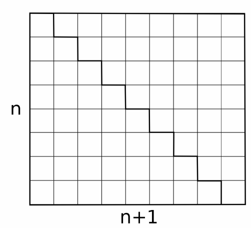
$$N_C(n,n)=\sum_{r=1}^{r=n} r^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\ \textbf{(II)}$$

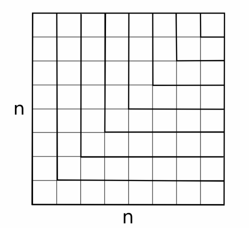
que da el mismo resultado obtenido en el método inductivo, cuya expresión sintética, bien conocida, de la suma, coincide también con el segundo resultado de Martin Gardner, con la explicación añadida de que el sumando de lugar r en **(II)**, r^2, representa el número de cuadrados de dimensiones $(n-r+1)\times(n-r+1)$.

Hemos denominado aquí $N_C(n,n)$, al número de cuadrados que pueden dibujarse en la cuadrícula de dimensiones $n\times n$. La razón de la inclusión del subíndice C y de la utilización del doble argumento (n,n), se pondrá de manifiesto más adelante en el tratamiento de las extensiones a la filiación rectangular y multidimensional.

1.1b.- El método gráfico

Una justificación más expresiva que la inductiva, de la anterior recurrencia **(I)**, y consecuentemente de **(II)**, se obtiene también, como veremos después, mediante una sencilla representación gráfica de la cuadrícula base bidimensional, que ha sido el origen y objeto principal del análisis. Anticipo la capacidad explicativa de estas soluciones gráficas directas, el conocido y manido *slogan* publicitario sobre el valor de la imagen, traducido también en la máxima *cuanto más simple mejor*, y pongo como ejemplos introductorios previos, las demostraciones ingeniosas tradicionales de dos sumas polinómicas elementales, demostraciones que resultan ser, asimismo, de índole *cuadricular*.

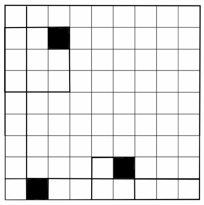




$$1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad\qquad 1+3+5+..+(2n-1)=n^2.$$

La primera resulta de la descomposición simétrica (similar *al ying y el yang* chinos) de un rectángulo de dimensiones $n\times(n+1)$, solución pareja en sencillez, y si se considera la partición que aparece en cada una de las filas, prácticamente idéntica a la conocida solución dada por Gauss a esta suma, como contestación casi inmediata a su maestro, en sus años de escolar pre-

coz, con la intuición de hacer previamente las sumas de cada dos sumandos equidistantes del centro, todas ellas con el resultado común $n+1$. La segunda representación, igualmente expresiva, es también inmediata a partir de la descomposición en bandas en ángulo recto, del cuadrado de dimensiones $n \times n$. Dos soluciones gráficas, hoy clásicas, y presentes en textos de divulgación matemática.
Centrándonos ya en nuestro problema, dibujamos la siguiente gráfica explicativa, referida a dos ejes rectangulares. La cuadrícula básica construida sobre los ejes, que son también lados del cuadrado de dimensiones $(n+1)\times(n+1)$, incluye la cuadrícula auxiliar, de dimensiones $n \times n$, resultante de eliminar sus primera columna y última fila.



Un cuadrado elemental cualquiera, de lado 1, del básico, definido por las coordenadas (r,s) de su vértice superior derecho, lo haremos corresponder al cuadrado con el mismo vértice superior derecho, y de lado el valor $mín(r,s)$, que **se dibuja** en la cuadrícula principal y **no** en la auxiliar, por incluir uno o varios cuadrados de la primera, que no pertenecen a la segunda. Existe además una correspondencia biunívoca recíproca obvia entre el cuadrado elemental y el así dibujado. Así pues, puesto que el número total de cuadrados elementales es el segundo miembro de **(I)**, la misma gráfica es, simplemente, *per se*, una prueba completa de **(I)**.
Más aún, consideremos esta última gráfica dividida en $n+1$ bandas en ángulo recto en la misma forma representada en la figura anterior. La banda s $(1 \le s \le n+1)$ se numera en el sentido de mayor a menor longitud de las bandas. El número de cuadrados elementales de la banda s es, pues, $2(n-s+1)+1$, cuyos cuadrados correspondientes, dibujados con el criterio indicado, tienen lado de longitud común s. Si $N(n+1,s)$ es el número total de cuadrados de lado s que pueden dibujarse en la cuadrícula básica, se cumple la recurrencia, análoga a **(I)**

$$N(h+1,s)-N(h,s)=2(h-s+1)+1, n \ge h \ge s, N(s,s)=1, \textbf{(III)}$$

cuya integración inmediata, aplicando la fórmula de la suma de la sucesión de números impares en la segunda figura, da el resultado previsto $N(n,s)=(n-s+1)^2$, que justifica la interpretación señalada del sumando de lugar $r=n+1-s$ en **(II)**.

1.2.- El número de rectángulos

Una primera extensión bidimensional, más general, de esta misma cuestión es la determinación paralela del número total de rectángulos que pueden dibujarse en la cuadrícula de dimensiones $n \times n$, cuya solución es la primera fórmula mencionada por Martin Gardner arriba indicada.

Un rectángulo posible cualquiera, de dimensiones $s \times t$, siendo obviamente $1 \le s,t \le n$, eventualmente cuadrado si $s=t$, admite $n-s+1$ posiciones distintas, mediante traslaciones en una dirección de los ejes, y $n-t+1$ en la dirección del segundo eje ortogonal. En consecuencia, el número total de rectángulos, incluídos los posibles cuadrados, resulta

$$N_R(n,n)=\sum_{s,t}(n-s+1)(n-t+1), 1 \le s,t \le n,$$

y, puesto que los índices s y t no guardan relación de dependencia

$$N_R(n,n)=\sum_{s=1}^{s=n}(n-t+1)\times\sum_{t=1}^{t=n}(n-t+1)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

que es igualmente el resultado incluido en el texto de Martin Gardner. La misma justificación ha sido publicada por el colegiado Emilio Recuenco en *La Voz* (**Ref.[6]**).
Si se consideran solamente cuadrados, existe, como decimos, la relación de dependencia $t = s$, y la suma doble anterior se reduce a la anterior suma simple **(II)**, con el resultado indicado en la misma.
Una segunda extensión en el plano, de solución inmediata, siguiendo el mismo razonamiento, supone las determinaciones análogas referidas a una retícula rectangular de dimensiones $m \times n$, con $m \geq n$. El número total de rectángulos es así

$$N_R(m,n) = \sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1) \times \sum_{t=1}^{t=m}(m-t+1) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2}.$$

Para el cálculo del número de cuadrados debe tenerse ahora en cuenta, además de la misma relación de dependencia anterior de los índices, $t = s$, la posible variación de los mismos, que estará limitada por el valor $mín(m,n) = n$. Se obtiene, por tanto

$$N_C(m,n) = \sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1)(m-s+1) = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6},$$

cuya determinación de la forma resultante final de la fórmula sumatoria no presenta ninguna dificultad. En el supuesto excluído $m = n$, volvemos a obtener nuevamente la solución **(II)** anterior.

1.3.- Las formulas sumatorias

La obtención de fórmulas sintéticas de las expresiones sumatorias anteriores resulta muy simple por el carácter elemental de las mismas, al actuar sobre términos de primer y segundo grado, como son los resultados bien conocidos de las dos primeras figuras y de **(II)**.
En los casos de sumas más complejas y no exclusivamente polinómicas, se dispone de dos métodos operacionales distintos, con validez general para funciones polinómicas enteras.

Primero, por aplicación de la simbología y propiedades del cálculo de diferencias finitas

$$\sum_{h=1}^{h=n} f(h) = \sum_{h=1}^{h=n} (\nabla^h) f(0), \nabla = 1 + \Delta,$$

y, segundo, el método, igualmente universal, de la integración simbólica en números de Bernouilli (con aplicación, a la primitiva de la integral, de la fórmula de Mac Laurin)

$$\sum_{h=1}^{h=n} f(h) = \int_B^{B+n} f(x)dx,$$

Como muestra ilustrativa de estas aplicaciones, formulamos una sencilla ampliación del problema planteado, preguntándonos por la superficie total de todos los cuadrados incluidos en **(II)**. La solución es ahora directa con la información ya disponible. En efecto, teniendo en cuenta, de nuevo, el significado de cada sumando de **(II)**, se tiene, como valor de esta superficie, la siguiente suma, algo menos simple que aquella

$$S(n) = 1^2 \times n^2 + 2^2 \times (n-1)^2 + ... + (n-1)^2 \times 2^2 + n^2 \times 1^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 \times (n-i+1)^2.$$

El recurso a cualquiera de los dos métodos apuntados, después de cálculos simples que no detallamos, conduce a la siguiente fórmula polinómica de S_n, expresada en la forma descompuesta factorial más reducida, sin la utilización de los números imaginarios,

$$S(n)=\frac{1}{30}n(n+1)(n+2)[(n+1)^2+1].$$

2.- El problema multidimensional

2.1.- Generación y propiedades del hipercubo

Podemos profundizar ya también, además, en extensiones multidimensionales similares del problema bidimensional, primero en el espacio tridimensional, el caso *cubicular*, esto es, para un entramado cúbico de dimensiones $n\times n\times n$, y, generalizando el problema, en cualquier espacio *p-dimensional*, E_p, para dimensiones $p>3$.

Una observación previa es el uso polisémico trópico, ¡una sinécdoque!, que hacemos del término **dimensión** en un doble sentido: como indicativo de la entidad del espacio (*continente*) de referencia, bi-, tri-, o *p*-dimensional, definido por un sistema de coordenadas ortonormal (espacio euclídeo), o como medición o longitud (*contenido*) de un elemento unidimensional, en nuestro caso, una arista cualquiera del hiperpoliedro o elemento base *p*-dimensional, al que se refiere el problema.

Nuestro elemento base será ahora, en efecto, un hipercubo de dimensión espacial *p*, que en el espacio tetradimensional recibe la denominación de *octaedroide*, y dimensiones lineales $n\times n\times ...\times n$ (*p* factores), en adelante, también, para simplificar el lenguaje, un *p*-cubo, que en el lenguaje matemático actual es un politopo particular regular, cuyos elementos frontera de una determinada dimensión, son todos iguales, de filiación el cuadrado. Además, ambos números, *p* y *n*, son independientes entre sí, correspondiendo, cada uno de ellos, a cada una de las dos acepciones de la palabra dimensión según nuestro comentario anterior.

En la literatura matemática se utiliza también para el hipercubo tetradimensional la denominación alternativa de *teseracto*, en su condición de cuarto miembro de la familia de los llamados *politopos de medida*: el par de puntos en el espacio lineal, y, sucesivamente, el cuadrado, cubo, teseracto,…

En primer lugar debe considerarse la cuestión de la construcción de un tal *p*-cubo con arista de dimensión **n**. Definiremos el espacio E_p por un sistema de coordenadas referidas a **p** ejes ortogonales (espacio euclídeo), los cuales son también aristas del politopo concurrentes en el vértice origen de coordenadas. La construcción ideal de este politopo es muy simple considerando que los vértices son todos los puntos cuyas **p** coordenadas están definidas por las variaciones con repetición de p elementos elegidos entre los números 0 y *n*. Entre ellos, todos los vértices que tienen una coordenada común, definen un hiperplano de dimensión $p-1$ que constituye el elemento frontera de mayor orden del politopo, cuyo número es 2*p*, equivalentes a las caras del cubo para $p=3$. En general todos los puntos **con *m* y sólo *m*** coordenadas iguales, independientemente de los valores de las $p-m$ coordenadas restantes, definen un elemento frontera de dimensión $p-m$, y el número es

$$\binom{p}{m}\times 2^m .$$

La expresión anterior, escrita en la forma alternativa

$$v_q(p)=\binom{p}{q}\times 2^{p-q},\ (\forall q, 0\leq q\leq p), \textbf{(IV)}$$

donde q es la dimensión común de los elementos pertenecientes a la clase $\nu_q(p)$, verifica obviamente la fórmula de Schlafli que relaciona los números de elementos frontera de cualquier hiperpoliedro en el espacio multidimensional, referida aquí a un p-cubo

$$\sum_{q=0}^{q=p}(-1)^q \nu_q(p) = \sum_{q=0}^{q=p}(-1)^q \binom{p}{q} \times 2^{p-q} = (2-1)^p = 1.$$

Como aplicación de la anterior expresión **(IV)**, hacemos aquí referencia al cuadro con la obtención secuencial del número de elementos frontera de dimensiones variables del hipercubo, que ha sido publicado, aunque sin demostración de la fórmula **(IV)**, en la **Ref.[7]**,p.294. El mismo cuadro se ilustra con observaciones sobre los primeros factores combinatorios de **(IV)**, para valores consecutivos del índice q, con las denominaciones alternativas de números hiperpiramidales o números poliedrales, que están directamente relacionados con la llamada geometría gnomónica de los pensadores clásicos griegos.

Indicamos también, a continuación, las principales propiedades de un p-cubo, que definen bien la abstracción geométrica de este politopo concreto, que resultan fácilmente comprensibles de forma intuitiva, y que son de utilidad en nuestra deducción posterior:

- El sistema de referencia está definido por las p aristas concurrentes en un vértice cualquiera que constituyen un sistema normalizado y definitorio, también, del espacio euclídeo E_p.
- Un elemento frontera cualquiera (arista, cuadrado, cubo, q-cubo $(\forall q, 1 \leq q \leq p-1)$, además de los vértices), es paralelo a un subespacio coordenado asociado de su misma dimensión (1, 2, 3, q,…, $p-1$).
- El número, $\nu_q(p)$, de q-cubos frontera (la fórmula es también válida para el valor $q = 0$, que correspondería a los vértices), es, nuevamente,

$$\nu_q(p) = \binom{p}{q} \times 2^{p-q}, \ (\forall q, 0 \leq q \leq p),$$

Para valores $q > 0$, estos elementos se dividen en grupos, cada uno integrado por todos los elementos paralelos a un mismo subespacio coordenado común de su misma dimensión q. El primer factor de $\nu_q(p)$, al que hemos hecho una referencia anterior, es el número de grupos y/o de subespacios de dimensión q, y el segundo factor, el número de elementos de cada grupo.
- Dos elementos cualesquiera, no paralelos, inclusive de dimensiones distintas, son ortogonales.

En esta definición de sus propiedades, el p-cubo genérico total se ha considerado en su estructura unitaria, es decir, prescindiendo de la subdivisión en n^p p-cubos "parciales", asociados a la dimensión longitudinal o, también, medición, n, de la arista. Esta división "hiperespacial" del p-cubo base, sí se tiene en cuenta ya, por el contrario, en el planteamiento y solución del problema multidimensional que hacemos a continuación.

2.2.- El problema multidimensional en el hipercubo

La cuestión que tratamos es, así, la determinación del número total de p-cubos **con aristas de dimensión**, o sea de longitud, ***s***, que pueden configurarse en el *p-cubo* genérico descrito, para todos los valores posibles de s ($\forall s, 1 \leq s \leq n$), considerándolo, ya, subdividido, como decimos, en la retícula de n^p p-cubos elementales, en el espacio de p dimensiones.

Se facilita la visualización de la demostración, analizando, primero, el caso de un cubo de dimensiones $n \times n \times n$ en el espacio tridimensional. Consideremos un cubo cualquiera de dimensiones $s \times s \times s$, incluido en el cubo total, siendo obviamente $1 \leq s \leq n$. Todos los cubos de igual dimensión son generados mediante traslaciones sucesivas del anterior en las direcciones de los tres ejes coordenados, siendo el número de posiciones posibles en cada una de estas tres direcciones $n - s + 1$. El número total de cubos de lado *i*, es pues

$$(n-s+1)\times(n-s+1)\times(n-s+1) = (n-s+1)^3,$$

debiendo efectuarse la suma para todos los valores de *i*, $1 \leq s \leq n$. El resultado, que precisamos después, haciendo el mismo cambio de índices $r + s = n + 1$, que en el anterior apartado 1.1a, tiene las formas alternativas

$$N_{HC}(n,n,n) = \sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1)^3 = \sum_{r=1}^{r=n} r^3.$$

La misma argumentación se generaliza análogamente en el caso *p*-dimensional en un razonamiento más abstracto, pero no más difícil de formular, teniendo en cuenta la generación y propiedades de un *p*-cubo cualquiera, en particular la relativa al paralelismo de elementos, obteniéndose en definitiva la fórmula generalizada

$$N_{HC}(n,n,..,n)^{(p} = \sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1)^p = \sum_{r=1}^{r=n} r^p,$$

donde el sumando de lugar *r*, r^p, en el sumatorio segundo es, nuevamente, como en los casos bi y tri-dimensional, el número de *p-cubos* con aristas de dimensión $s = n - r + 1$.
Se obtienen las dos expresiones distintas siguientes de esta suma, cada una con $p+1$ sumandos frente a los *n* sumandos de la suma inicial, aplicando los dos métodos más arriba apuntados.

Primero, por las propiedades del cálculo de diferencias finitas

$$N_{HC}(n^p) = \binom{n}{1} + \sum_{i=1}^{i=p}\binom{n}{i+1}\Delta^i 1^p \ ,\textbf{(V)}$$

y, segundo, mediante la integración simbólica en números de Bernouilli

$$N_{HC}(n^P) = \frac{1}{p+1}\left[n^{p+1} + \sum_{i=1}^{i=p}\binom{p+1}{i} B_i\, n^{p-i+1}\right].\textbf{(VI)}$$

Cualquiera de estas expresiones, en el caso cúbico, *p=3*, da la solución sintética, bien conocida

$$N_{HC}(n,n,n) = \sum_{i=1}^{i=3} i^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

Para valores $p \geq n$ tiene ventaja la segunda expresión que da directamente su ordenación potencial polinómica, además de la reducción sensible del número de sumandos que supone la siguiente propiedad, que destacamos, de los números de Bernouilli: $B_{2i+1} = 0, i > 0$.
Para valores $n >> p$, el potencial operativo de la fórmula **(II)** es muy superior al de la fórmula **(I)**, por las dos razones anteriores y por la mayor simplicidad de sus respectivos números combinatorios.
Como información de erudición anecdótica, ilustrativa de esta superioridad, añadiremos también aquí, el siguiente cómputo rápido, que realizó, presuntuosamente, el mayor de los hermanos Bernouilli, Jacob (1.654-1.705), matemático genial, y también soberbio, ¡en menos de 10 minutos y sin necesidad de ninguna moderna computadora!, mediante aplicación de su propio método reflejado en la última fórmula anterior,

$$1^{10}+2^{10}+\ldots+1000^{10}=$$
$$=91.409.924.241.424.243.424.241.924.242.500,$$

dejando en simple intento voluntarioso, el denodado esfuerzo anterior del monje Ismael Bullialdus, para el cálculo de, tan sólo, las seis primeras potencias.

Puede plantearse, asimismo, también, una extensión del problema, similar a la ya resuelta en el caso bidimensional. Esto es, la determinación de la fórmula más simple del volumen total de todos los cubos formados en 3 dimensiones, como equivalente a la obtenida allí para la superficie total de cuadrados.

Después de un sencillo, aunque farragoso, cálculo numérico, se obtiene el resultado siguiente, expresado, como en el caso cuadricular, en la forma factorial más reducida sin el empleo de coeficientes irracionales ni imaginarios,

$$V(n,n,n)=\sum_{s=1}^{s=n} s^3(n+1-s)^3=\frac{1}{420}\times n(n+1)(n+2)[3(n+1)^4+3(n+1)^2+10].$$

La obtención de esta fórmula de grado 7, cuya estructura factorial ha resultado muy similar a su paralela de grado 5 en el plano, ha requerido igualmente, alguna astucia inicial para la optimización del esquema de cálculo, y final, para la obtención de la descomposición factorial.

2.3.- Extensión a retículas multidimensionales de filiación rectangular

Podemos profundizar ya también, además, en extensiones multidimensionales de filiación rectangular, en lugar de cuadrada, similar a las efectuadas en dos dimensiones.

El elemento base es ahora un hiperparaleloedro ortocéntrico, al que son aplicables las mismas propiedades topológicas enunciadas para el hipercubo, ya que la única diferencia radica en eventuales variaciones dimensionales entre elementos frontera de clases distintas.

Para su definición más precisa, que resulta más cómoda en las deducciones siguientes, consideremos el conjunto $s_h\{h=1,..,p\}$ de longitudes de aristas con un vértice común, ordenado de forma no decreciente

$$s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_p .$$

El conjunto de aristas constituye un sistema ortogonal, definitorio del espacio E_p.

Una primera aplicación, siguiendo el desarrollo anterior bidimensional, es la determinación del número de *p*-ortoedros que incluye el *p*-cubo de longitud *n* de arista, esto es, el caso $s_i = n,(i=1,..,p)$. Aplicando nuevamente el método traslacional descrito, resulta la suma de orden *p*

$$N_{HR}(n,n,..,n)^{(p}=\sum_{s_i=1}^{s_i=n}\left[\Pi_{s=s_1}^{s=s_p}(n-s+1)\right],$$

y, puesto que los *p* índices s_i tienen variaciones independientes, y por tanto las dos operaciones suma y producto son intercambiables, y además todas las sumas parciales son iguales, se tiene finalmente

$$N_{HR}(n,n,..,n)^{(p}=\Pi_{i=1}^{i=p}\left[\sum_{s_i=1}^{s_i=n}(n-s_i+1)\right]=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^p,$$

y, entre todos ellos, teniendo ahora en cuenta la relación de dependencia de los índices

$$s_i = s, \forall i \in (1,\ldots,p),$$

se determina también el número de hipercubos de longitudes de arista variables de 1 a *n*

$$N_{HC}(n,n,..,n)^{(p} = \sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1)^p = \sum_{r=1}^{r=n} r^p,$$

que obtuvimos ya en la sección 3, habiendo hecho, como antes, el cambio de índices

$$r+s=n+1.$$

La segunda extensión más general corresponde al hiperpoliedro ortocéntrico de aristas $s_i(i=1,..,p)$. En primer lugar, el número total de *p*-ortoedros, incluídos todos los *p*-cubos posibles, será

$$N_{HR}(n,.,..,n)^{(p} = \sum_{i=1}^{i=p}\left[\Pi_{\sigma_i=1}^{\sigma_i=s_i}(s_i-\sigma_i+1)\right],$$

y, como los índices $\sigma_i(s_i)$ son independientes para valores distintos de i, son también intercambiables las operaciones suma y producto, resultando

$$N_{HR}(s_1,s_2,..,s_p) = \Pi_{i=1}^{i=p}\left[\sum_{\sigma_i=1}^{\sigma_i=s_i}(s_i-\sigma_i+1)\right] = \frac{1}{2^p}\times\Pi_{i=1}^{i=p}\left[s_i(s_i+1)\right].$$

Por último, para el cálculo del número de hipercubos en el hiperpoliedro de referencia debe tenerse ahora en cuenta, además de la misma relación de dependencia anterior de los índices, $\sigma_i=\sigma, \forall i\in(1,..,p)$, la variación de los mismos, que estará limitada por el valor $mín(s_i)=s_1$. Se obtiene, por tanto

$$N_{HC}(s_1,s_2,..,s_p) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s_1}\left[\Pi_{i=1}^{i=p}(s_i-\sigma+1)\right].$$

El polinomio de grado *p* en la variable $\sigma-1$, argumento del sumatorio, se desarrolla en una forma más explícita, a la que resultarán directamente aplicables cualquiera de las fórmulas, de integración por diferencias finitas o por la fórmula de Bernouilli, anteriormente aplicadas. Se puede escribir al efecto

$$\Pi_{i=1}^{i=p}(s_i-\sigma+1) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=p}(-1)^{p-\alpha}S_\alpha(\sigma-1)^{p-\alpha}, S_0=1,$$

donde S_α representa las funciones simétricas sumatorias de productos de cada α factores s_i.

En la aplicación de una u otra fórmula para obtener expresiones más sintéticas, que obviamos, será práctico, además, considerar la nueva variable $\tau=\sigma-1$ en ambas aplicaciones, y la función $\varphi=\tau^p$ para el cálculo de las sucesivas diferencias en la primera.

Por último, las expresiones de hipervolúmenes totales, que son generalizaciones de las obtenidas explicitamente para dimensiones 2 y 3, resultan

$$V_{HR}(s_1,s_2,..,s_p) = \Pi_{i=1}^{i=p}\left[\sum_{\sigma_i=1}^{\sigma_i=s_i}\sigma_i(s_i-\sigma_i+1)\right] = \frac{1}{6^p}\Pi_{i=1}^{i=p}\left[s_i(s_i+1)(s_i+2)\right]$$

$$V_{HR}(n,n,..,n)^{(p} = \frac{1}{6^p}\left[n(n+1)(n+2)\right]^p$$

$$V_{HC}(s_1,s_2,..,s_p) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s_1}\left[\sigma^p\Pi_{i=1}^{i=p}(s_i-\sigma+1)\right]$$

$$V_{HC}(n,n,..,n)^{(p} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n}\sigma^p(n-\sigma+1)^p.$$

La obtención de expresiones sintéticas de las dos últimas sumas puede llevarse a cabo de forma similar a la ya realizada en las secciones anteriores en espacios de 2 y 3 dimensiones, mediante aplicación alternativa de las integrales simbólicas de diferencias finitas o de Bernouilli.
En el siguiente apartado final, se obtiene una relación, no obvia, entre las diferencias sucesivas de la función potencial n^p, derivada de la aplicación alternativa de las dos fórmulas sumatorias.

3.- Una relación en diferencias de la función potencial entera

Consideremos las dos expresiones sumatorias equivalentes de los términos de una sucesión potencial, **(V)** y **(VI)**, obtenidas en el apartado 2.3, que repetimos aquí, explicitando cada sumando:
Primero, mediante aplicación de las diferencias finitas

$$S(n,p)=\sum_{i=1}^{i=n} i^p=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\Delta 1^p+\binom{n}{3}\Delta^2 1^p+\ldots+\binom{n}{p+1}\Delta^p 1^p,$$

y, segundo, mediante la integración simbólica en números de Bernouilli

$$S(n,p)=\sum_{i=1}^{i=n} i^p=\frac{1}{p+1}\left[n^{p+1}+\binom{p+1}{1}B_1 n^p+\binom{p+1}{2}B_2 n^{p-1}+\ldots+\binom{p+1}{p}B_p n\right].$$

Las propiedades de los números de Bernouilli permiten la determinación de algunas propiedades significativas de la expresión $S(n,p)$, relacionadas, en particular, con una eventual descomposición factorial de la anterior forma polinómica en la variable n.
En primer término resulta evidente, en ambas expresiones, que la forma polinómica de grado $p+1$ en *n*, contiene el factor *n*. Además, teniendo en cuenta, como decimos, las propiedades de los números de Bernouilli, se deduce de la segunda expresión que si *p* es un número impar distinto de 1, el polinomio contiene el factor n^2, pues $B_p=B_{2h+1}=0$, con $h>1$.
Podemos demostrar también que la forma factorial polinómica contiene igualmente el factor $n+1$ para todos los valores $p>0$.

La definición clásica de los números B_h se escribe en la forma simbólica

$$B_h=(B-1)_{(h},h>1,B_1=\frac{1}{2},$$

cuyo desarrollo completo es

$$B_h=B_h-\binom{h}{1}B_{h-1}+\ldots+(-1)^{h-1}\binom{h}{h-1}B_1+(-1)^h,h>1B_1=\frac{1}{2}.$$

Designamos también como $\varphi(n)$ la forma polinómica de $S(n,p)$, que se obtiene ya explícita en el método de Bernouilli. Prescindimos de la condición entera de *n*, considerando la función continua $\varphi(x)$. El valor de esta función, para el valor de la variable $x=-1$, se escribe

$$\varphi(-1)=\frac{1}{p+1}\left[(-1)^{p+1}+(-1)^p\binom{p+1}{1}B_1+(-1)^{p-1}\binom{p+1}{2}B_2+\ldots+(-1)\binom{p+1}{p}B_p\right],$$

y, teniendo en cuenta la expresión inmediata anterior, particularizada para $h=p+1$, resulta obviamente

$$\varphi(-1)=0,$$

luego la expresión factorial más sintética de $S(n,p)$ contiene el factor $n+1$ para cualesquiera valores naturales de las variables n y p.

Debemos hacer notar que las tres deducciones anteriores, relativas al factor común $n(n+1)$ en la forma $S(n,p)$, para cualesquiera valores de n y p, y la relativa al factor común $n^2(n+1)$, para valores impares de p, no implican naturalmente que los valores numéricos particulares sean divisores del resultado numérico final, entero, de $S(n,p)$, lo cual es debido a la presencia del coeficiente denominador común $p+1$, y de otros denominadores numéricos en los valores, eso sí, racionales, de los números de Bernouilli, B_p. Así, en el ejemplo calculado por el propio J. Bernouilli, presentado en la **Ref.[3](II)**, esto es $\sum_1^{1000} n^{10}$, el resultado final es múltiplo de 100, lo que no es siquiera significativo, pero no es múltiplo del producto 1000×1001.

Aplicando la propiedad del factor común literal común, $n+1$, a la forma equivalente primera de $S(n,p)$, es decir, a su expresión sumatoria alternativa en diferencias finitas, considerada igualmente $S(n,p)$ como función continua de la variable *x*, se tiene la siguiente relación en las diferencias finitas de la función potencial n^p

$$\binom{-1}{1}+\binom{-1}{2}\Delta 1^p+\binom{-1}{3}\Delta^2 1^p+\ldots+\binom{-1}{p+1}\Delta^p 1^p=0,$$

o sea,

$$(-1)+\Delta 1^p-\Delta^2 1^p+\ldots+(-1)^{p+1}\Delta^p 1^p=0,$$

o bien, finalmente,

$$\sum_{h=1}^{h=p}(-1)^h\Delta^h 1^p=-1.$$

REFERENCIAS

[1].- Martin Gardner, *Carnaval Matemático,p.124* (Alianza Editorial, Madrid, 1980)
[2]- P. Rubio, *Sobre la inducción* (La Voz del Colegiado, nº 330, octubre, 2009)
[3](I).- P. Rubio, *Entretenimientos cuadriculares bi-, tri- y multidimensionales* (I) (La Voz del Colegiado, nº 350, septiembre, 2011)
[3](II).- P. Rubio, *Entretenimientos cuadriculares bi-, tri- y multidimensionales* (II) (La Voz del Colegiado, nº 352, noviembre-diciembre, 2011)
[4].- J.F. Martínez Carbonero, *La Inducción* (La Voz del Colegiado, nº 327, junio, 2009)
[5].- E. Recuenco, *El principio de inducción completa* (La Voz del Colegiado, nº 336, mayo, 2010)
[6].- E. Recuenco, *Comentarios a los Entretenimientos Cuadriculares* (La Voz del Colegiado, nº 352, noviembre-diciembre, 2011)
[7].- M.C. Ghyka, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes,p.294* (Editorial Poseidon, 1983)