SUMARIO

El origen de este texto se sitúa en la Opinión titulada "Geometría Afín", publicada por mi compañero David Vergés en el nº 363/enero 2013, de *La Voz del Colegiado*, que es el órgano de comunicación profesional y social de los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, continuada después por mi parte en la Opinión publicada en el nº 365/marzo 2013 de La Voz.

El resultado del artículo de Vergés, suponía la división de la superficie triangular de un triángulo cualquiera, en seis superficies parciales, tres de ellas, triángulos semejantes al triángulo base y las otras tres, paralelogramos de lados respectivamente paralelos a los tres pares distintos de lados del mismo triángulo, mediante paralelas a estos lados incidentes con el centro de gravedad G del triángulo, seguida de la transformación afín de este triángulo en un triángulo equilátero, obteniéndose así, de manera inmediata, los siguientes resultados de las áreas respectivas de triángulos (S'_i, i=1,2,3) y paralelogramos (S_i, i=1,2,3), siendo S el área del triángulo base, ABC ,

$$S_i = 2S'_i = 2S/9,\ i = 1,2,3$$

Además de la siguiente relación, invariante para cualquier triángulo, entre los respectivos productos de ambas ternas de elementos homólogos,

$$S_1S_2S_3 / S'_1S'_2S'_3 = 1/8 .$$

Mi comentario subsiguiente se refirió a una generalización de los resultados anteriores, reemplazando el centro de gravedad del triángulo base por un punto P cualquiera del plano. La superficie total del triángulo queda dividida en tres paralelogramos y tres triángulos, asociados en tres pares formados por cada dos elementos distintos opuestos, conservando las mismas denominaciones anteriores de sus respectivas áreas.

El punto P se determina geométricamente por sus coordenadas trilineales normales absolutas en el triángulo ABC, que son las distancias signadas, a los lados BC, CA, AB ; y, también, en otra elección alternativa, que resulta de utilidad principal en la formulación de los resultados finales, por sus coordenadas baricéntricas absolutas, que son las áreas respectivas, asimismo signadas, s_1, s_2, s_3, de cada triángulo PBC, PCA, PAB.

Aplicando expresiones deducidas de s_1, S_1, S'_1 y dos relaciones más, de los lados y del área, bien conocidas en la geometría elemental del triángulo, se obtenían formulaciones de las áreas que expresan, a continuación, el mencionado resultado generalizado:

1) Las áreas de los tres paralelogramos son inversamente proporcionales a las coordenadas baricéntricas del punto P, y las áreas de sus triángulos asociados son directamente proporcionales a los cuadrados de las mismas coordenadas, cumpliéndose los dos grupos de igualdades siguientes, donde los últimos miembros son los factores de proporcionalidad respectivos:

$$S_1/s_1^{-1}= S_2/s_2^{-1}= S_3/s_3^{-1}= 2\, s_1s_2s_3 /S$$
$$S'_1/s_1^{2}= S'_2/s_2^{2}= S'_3/s_3^{2}= 1/S$$

2) Para cualquier punto P, el producto de las áreas de los tres paralelogramos y el producto de las áreas de los tres triángulos opuestos son, ambos, directamente proporcionales al producto $s_1^2s_2^2s_3^2$, y la relación entre los dos productos anteriores es independiente del punto elegido y tiene, además, el mismo valor anterior (=1/8), en un triángulo cualquiera y para un punto cualquiera del plano no incidente con los lados del triángulo base. Se cumplen, asimismo, las igualdades que dan el valor de cada producto, dependientes, en común, del producto $s_1s_2s_3 = \Pi$:

$$S_1S_2S_3 = 8\, S'_1S'_2S'_3 =8(s_1s_2s_3)^2 /S^3 .$$

La familia de cúbicas triangulares, que constituye el contenido y objeto principal de esta publicación, y que denominamos isométricas factoriales, se define por el valor constante del producto π, en cualquier punto de la curva, de manera que todos los puntos de la curva participan también de valores comunes de los dos productos $S_1S_2\,S_3$ y $S'_1S'_2\,S'_3$ resultantes de la construcción indicada, mediante paralelas, aquí por un punto cualquiera de la curva, a los tres lados del triángulo base.

Así pues, la ecuación de una curva particular, en el sistema coordenado triangular y en las coordenadas baricéntricas, está dada por la misma expresión anterior del propio producto, para un valor real supuesto de π, cuyas variaciones de signatura, con la convención de signos que se define, y modulares, en distintas regiones del plano, se precisan en el estudio.

Las propiedades que se deducen, facilitan cuatro tipos de representaciones gráficas distintas, de cúbicas de la familia, para puntos definitorios de las mismas, mediante la terna de coordenadas s_1, s_2, s_3 de un punto cualquiera de cada una de ellas, según la posición de este punto en las distintas regiones del plano.

En primer lugar, se anticipa en el análisis, para su previa utilización en la siguiente representación posterior de la variación planar del parámetro π, una representación de la cúbica correspondiente al valor particular $S^3/27$ de π, la que puede considerarse un miembro especialmente diferenciado de la familia que denominamos, de cúbicas isométricas factoriales.

El punto definitorio y singular, *G,* de esta cúbica, es el centro de gravedad del triángulo *ABC*, o, también, como definitorios alternativos, cualquiera de sus tres puntos propios respectivamente incidentes con cada mediana.

Los tres tipos de figuras siguientes, representativas de tres subfamilias diferenciadas de cúbicas, completan, además de la primera anterior, las diferentes formas de la cúbica, que están directamente relacionadas con tres parámetros anteriormente analizados cuya definición y subsiguiente formulación, con sus respectivas variaciones planares, han sido también previamente representadas.

Las cuatro representaciones distintas de cúbicas, incluyen leyendas explicativas de su ecuación correspondiente, con indicación de sus respectivos puntos definitorios, elegidos también, como en la anterior, como pertenecientes a sendas ternas de puntos de intersección con cada mediana, con sus respectivas tangentes, paralelas a cada lado opuesto del triángulo base.

Se representan también en cada una de ellas hexágonos inscritos con ternas de lados opuestos paralelos a los lados del triángulo base correspondientes a cualesquiera puntos de cada cúbica, arbitrariamente elegidos, que es una propiedad general de estas cúbicas.

Palabras clave: Áreas triangulares, Baricentro triangular, Teorema de Routh, Cubicas bidimensionales, Coordenadas triangulares baricéntricas, Propiedad isométrica factorial.
Key words: Triangular surfaces, Gravity center, Routh´s theorem, Bidimensional cubics, Triangular gravity coordinates, Factorial isometric property.

https://www.bubok.es/libros/260668/LAS-CUBICAS-TRIANGULARES-ISOMETRICAS-FACTORIALES