

El teorema de Vergés generalizado

Pablo Rubio Pérez

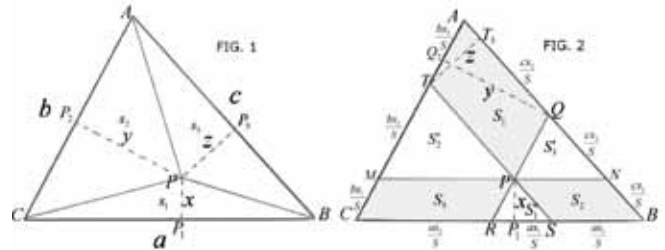
Colegiado nº 1.588

Con respecto a la Opinión titulada Geometría Afín, publicada por David Vergés en el nº 363, enero 2013, de La Voz, agradezco, en primer término, su referencia al “teorema sobre triángulos por parte de nuestro compañero don Pablo Rubio” (sic). Al compañero y amigo David, le ruego que prescinda del “don”, y que no me prive así de la sensación de quitarme de encima algunos de los, para mí, farragosos 78 años ya, la que viene siendo un motivo principal de las comunicaciones que envío, y cuya publicación agradezco a La Voz.

Entrando en materia, como anticipo en el título de esta Opinión, el resultado de su artículo pudiera bien denominarse, a mi conocimiento, el Teorema de Vergés, mientras no se verifique otra justificación de su originalidad anterior por parte del mundo matemático. Una observación complementaria preliminar, que no supone ninguna incidencia en cuanto a la elegancia y la sencillez de su demostración, basada en la transformación afín de un triángulo cualquiera en un triángulo equilátero, es que el factor de proporcionalidad de dos áreas imágenes, en la primera y segunda figura, que es el elemento clave de la prueba, es el valor del determinante jacobiano de la transformación lineal aplicada.

Mi comentario se refiere a una generalización del teorema, reemplazando el centro de gravedad del triángulo base por un punto cualquiera del plano, que, para mayor sencillez explicativa, se limitará a un punto interior al triángulo.

El recurso anterior a la geometría afín, no proporciona ahora ninguna ventaja, siendo suficiente la operación en el campo de la geometría métrica simple, con ayuda de las relaciones trigonométricas elementales. Se utilizarán, al efecto, las siguientes notaciones usuales: de los vértices y ángulos, A, B, C; de las longitudes de los lados, a, b, c; de los radios de los círculos circunscrito e inscrito, R y r; y del área del triángulo base, S; además de las relaciones triangulares, bien conocidas, $a=2R\sin A$ y $abc=4RS$.



Sea P el punto interior del triángulo, y MN, QR, ST las paralelas por P a cada lado, que corta, cada una de ellas, a los dos lados no paralelos (Figs. 1 y 2). El punto P se determina geoméricamente por sus coordenadas trilineales normales absolutas en el triángulo ABC, que son las distancias x, y, z a los lados BC, CA, AB; y, también, en otra elección alternativa, que será la de utilidad principal en la formulación de los resultados finales, por sus coordenadas baricéntricas absolutas, que son las áreas respectivas, s_1 , s_2 , s_3 , de cada triángulo PBC, PCA, PAB, cumpliéndose, por tanto, las relaciones siguientes entre los dos tipos de coordenadas: $s_1=ax/2$; $s_2=by/2$; $s_3=cz/2$.

La superficie total del triángulo queda dividida en tres paralelogramos y tres triángulos, asociados en tres pares formados por cada dos elementos distintos opuestos. Las áreas respectivas de paralelogramos y triángulos se denominan S_1 , S_2 , S_3 y S'_1 , S'_2 , S'_3 . Las longitudes de los lados de paralelogramos y triángulos se deducen mediante simples razones trigonométricas, obteniéndose, por ejemplo, para el par PTAQ y PSR (Fig. 2),

$$\begin{aligned} PT=AQ=y/\sin A; PQ=AT=z/\sin A \\ PS=x/\sin B; PR=x/\sin C; RS=x\sin A/\sin B\sin C \end{aligned}$$

Las áreas correspondientes de los mismos elementos resultan:

$$\begin{aligned} S_1=AQ \cdot AT \sin A=yz/\sin A \\ S'_1=1/2 \cdot PS \cdot PR \sin A=x^2 \sin A/2\sin B\sin C \end{aligned}$$

Las correspondientes a los otros dos pares se obtienen mediante simples permutaciones cíclicas de los términos literales.

Aplicando estas expresiones de s_1 , S_1 , S'_1 y las relaciones anteriormente mencionadas de la geometría elemental del triángulo, se obtienen los siguientes resultados que son expresión del teorema generalizado:

I) Las áreas de los tres paralelogramos son inversamente proporcionales a las coordenadas baricéntricas del punto P, y las áreas de sus triángulos asociados son directamente proporcionales a los cuadrados de las mismas coordenadas, cumpliéndose los dos grupos de igualdades siguientes, donde los últimos miembros son los factores de proporcionalidad respectivos:

$$\begin{aligned} S_1/s_1^{-1} &= S_2/s_2^{-1} = S_3/s_3^{-1} = 2s_1s_2s_3/S \\ S'_1/s_1^2 &= S'_2/s_2^2 = S'_3/s_3^2 = 1/S \end{aligned}$$

II) Para cualquier punto P, el producto de las áreas de los tres paralelogramos y el producto de las áreas de los tres triángulos opuestos, son directamente proporcionales al producto $s_1^2s_2^2s_3^2$, y la relación entre los dos productos anteriores tiene el mismo valor (=8), en un triángulo cualquiera. Se cumplen, además, las igualdades que dan el valor de cada producto:

$$S_1S_2S_3 = 8 \cdot S'_1S'_2S'_3 = 8 \cdot (s_1s_2s_3)^2/S^3$$

III) Las tres paralelas a los lados del triángulo base por P, dividen a cada lado en tres segmentos proporcionales a los tres números s_1, s_2, s_3 , según tres ordenaciones cíclicas de los subíndices, esto es, para cada lado CA, AB, BC y en el sentido dextrógiro: 123, 231, 312. Por ejemplo, para el lado BC, se cumplen las relaciones siguientes, incluida la constante de proporcionalidad en el último miembro:

$$BS/s_3 = SR/s_1 = RC/s_2 = a/S$$

Obsérvese, al respecto, que los tres triángulos son semejantes al dado y se cumple, por ejemplo, según I), $S'_1/S = (s_1/S)^2$, de manera que las razones de semejanza simples son, en efecto, $s_1/S, s_2/S$ y s_3/S , para cada triángulo, lo que justifica la proporcionalidad indicada y las particiones de los lados del triángulo base representadas en la fig. 2.

Son dos casos particulares:

1º) Si el punto P es el centro de gravedad del triángulo, se verifica $s_1=s_2=s_3=S/3$, y se obtienen los resultados de Vergés, esto es:

$$S_i = 2S'_i = 2S/9, i=1,2,3$$

Las tres paralelas por P dividen a los tres lados en tres segmentos de igual longitud.

2º) Si el punto coincide con el incentro del triángulo, esto es, $x=y=z=r$, o también, $s_1=ra/2, s_2=rb/2, s_3=rc/2$: a) los tres paralelogramos son rombos, b) las áreas de los tres rombos son inversamente proporcionales a los lados a, b y c , y las áreas de los tres triángulos asociados respectivos, son directamente proporcionales a a^2, b^2 y c^2 , c) las paralelas por el incentro a los lados dividen a cada uno de los lados, en tres segmentos de longitudes proporcionales a a, b y c . ■

PREMIOS Y DISTINCIONES



Manuel Elices, galardonado con el Premio Miguel Catalán

Nuestro compañero Manuel Elices Calafat ha recibido el Premio Miguel Catalán, máximo galardón que otorga la Comunidad de Madrid para honrar la labor de un científico.

La actividad investigadora y pedagógica del profesor Manuel Elices se ha desarrollado sin interrupción desde 1964 y ha tenido un gran impacto en el ámbito español e internacional.

Entre otros méritos, cabe destacar su labor pionera en el campo de la Seguridad Estructural, con la gestación del Grupo Español de Seguridad Estructural, y su impacto en el sector

industrial; su papel en el desarrollo de los estudios de la Ciencia de los Materiales y, en particular, en la implantación de la carrera de Ingeniero de Materiales en España. Recientemente, ha sido reseñable su incursión en el campo de los Materiales Biológicos, Biomateriales y Biomimetismo, con relevantes repercusiones en el campo de las Ciencias de la Salud.

Manuel Elices es académico de la Real Academia de Ciencias, de la Real Academia de Ingeniería y de la Academia de Ingeniería de los Estados Unidos. Es el primer ingeniero de Caminos, Canales y Puertos que recibe el Premio Miguel Catalán. ■