TRIÁNGULOS CEVIANOS CONCÍCLICOS

1.- DEFINICIÓN Y PROPIEDADES GENERALES DE LOS TRIÁNGULOS CEVIANOS

Se denominan triángulos cevianos, con relación a un triángulo de referencia dado, ABC, a los triángulos inscritos cuyos vértices, P_a, P_b, P_C, son las proyecciones lineales (mediante cevianas) de un punto arbitrario P, con exclusión de los puntos A, B y C, desde cada uno de estos tres vértices sobre el lado opuesto correspondiente.
Los siguientes teoremas se refieren a propiedades de estos triángulos que son de utilización posterior. En las demostraciones se utilizará un sistema de coordenadas trilineales homogéneas referido al triángulo ABC.

Teorema 1.1: Los cuatro puntos A, B, C y P constituyen un conjunto de puntos armónicamente asociados con relación al triángulo $P_1P_2P_3$, que es el triángulo ceviano de P en el triángulo ABC.
Si $P \equiv (x, y, z)$, son obviamente, $P_1 \equiv (0, y, z)$, $P_2 \equiv (x, 0, z)$, $P_3 \equiv (x, y, 0)$ y la ecuación de la recta P_2P_3 resulta

$$-\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

cuya intersección con la recta $AP \equiv AP_1$ es el punto $R_1 \equiv (2x, y, z)$.
Proyectando, por ejemplo, desde el vértice B la cuaterna $(A, P; R_1, P_1)$, la razón doble del haz de rectas y de esta cuaterna ordenada, resulta efectivamente

$$B(A, P; R_1, P_1) = \left(\infty, \frac{x}{z}; \frac{2x}{z}, 0 \right) = \frac{\frac{2x}{z} - \frac{x}{z}}{0 - \frac{x}{z}} = -1.$$

Se comprueba también que la recta P_2P_3 es armónica asociada de $P_a \equiv (-x, y, z)$, que es el punto armónico asociado de P en el triángulo ABC, situado en la recta AP.

Teorema 1.2: Sean los tres puntos $P_1(0, y_1, z_1), P_2(x_2, 0, z_2), P_3(x_3, y_3, 0)$, respectivamente situados en cada lado BC, CA, AB. La condición necesaria y suficiente para que los tres puntos P_1, P_2, P_3 sean vértices de un triángulo ceviano se escribe

$$\frac{y_1}{z_1} \times \frac{z_2}{x_2} \times \frac{x_3}{y_3} = 1. \quad \textbf{(I)}$$

Las ecuaciones de las cevianas AP_1, BP_2, CP_3 resultan

$$\begin{aligned} Yz_1 - Zy_1 &= 0 \\ Zx_2 - Xz_2 &= 0 \quad \textbf{(II)} \\ Xy_3 - Yx_3 &= 0 \end{aligned}$$

y la condición de concurrencia de estas rectas es la anulación del determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & z_1 & -y_1 \\ -z_2 & 0 & x_2 \\ y_3 & -x_3 & 0 \end{vmatrix} = z_1x_2y_3 - y_1z_2x_3 = 0, \quad \textbf{(III)}$$

que prueba la condición necesaria **(I)**.
Por otro lado, la intersección de las dos rectas AP_1 y BP_2 es el punto $P(x_2z_1, z_2y_1, z_1z_2)$, que está también situado en la recta CP_3 si se cumple la misma relación **(I)**, que resulta ser, así, una condición suficiente.
En realidad la expresión **(I)** es una versión modificada del Teorema clásico de Ceva que relaciona las distancias entre cada punto P_1, P_2, P_3 y el par de vértices situados en el mismo lado, B y C, C. y A, A y B. La conversión de **(I)** a esta segunda expresión es inmediata si se consideran coordenadas trilineales normales, mediante sencillas relaciones trigonométricas adicionales.
Observamos también que la representación geométrica de los triángulos ABC y $P_1P_2P_3$ depende únicamente de dos parámetros que son dos cualesquiera de las tres razones proporcionales de las dos coordenadas no nulas de cada punto P_1, P_2, P_3, teniendo en cuenta la relación obligada entre las tres razones dada por **(I)**.

Teorema 1.3: Los puntos $Q_1(0, y_1, -z_1), Q_2(-x_2, 0, z_2), Q_3(x_3, -y_3, 0)$ que son conjugados armónicos de P_1, P_2, P_3 respecto de B y C, C y A, A y B, están alineados.
Sustituyendo las coordenadas de Q_1, Q_2, Q_3 en la ecuación lineal homogénea

$$ux + vy + wz = 0,$$

resulta el sistema

$$\begin{cases} vy_1 - wz_1 = 0 \\ wz_2 - ux_2 = 0 \quad \textbf{(IV)} \\ ux_3 - vy_3 = 0, \end{cases}$$

y el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & -z_1 \\ -x_2 & 0 & z_2 \\ x_3 & -y_3 & 0 \end{vmatrix} = y_1z_2x_3 - z_1x_2y_3 = 0,$$

que se anula en virtud de **(III)**, siendo la ecuación de la recta incidente con Q_1, Q_2 y Q_3, deducida de **(IV)**

$$\frac{x}{x_2z_1} + \frac{y}{z_2y_1} + \frac{z}{z_1z_2} = 0,$$

que es la recta armónica asociada de P en el triángulo ABC, pues se cumple, en efecto, resolviendo el sistema **(II)** y teniendo en cuenta **(I)**,

$$P \equiv (x_2z_1, z_2y_1, z_1z_2).$$

Como en la conclusión similar del Teorema 2, la expresión **(I)**, referida a la recta $Q_1Q_2Q_3$, es una versión modificada del Teorema clásico de Menelao que relaciona las distancias entre los puntos relaciona las distancias entre cada punto Q_1, Q_2, Q_3 y el par de vértices situados en el mismo lado, B y C, C. y A, A y B.

Teorema 1.4: El lugar geométrico de los puntos armónicos asociados de las rectas de un haz, con relación al triángulo ABC es una cónica circunscrita al triángulo. Las tangentes a la cónica en A,B y C son los lados del triángulo cuyos vértices son los puntos armónicos asociados del punto común de las rectas del haz, en el triángulo ABC.

La ecuación general de una recta del haz se escribe

$$uX + vY + wZ = 0, \quad \textbf{(V)}$$

y la condición de incidencia con el punto común $P(x,y,z)$

$$ux + vy + wz = 0,$$

luego el lugar del punto armónico asociado de **(V)** es la cónica

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 0,$$

y, también,

$$xYZ + yZX + zXY = 0.$$

Las ecuaciones respectivas de las tangentes en los vértices B y C se escriben

$$xZ + zX = 0$$

$$xY + yX = 0$$

y su intersección, $P_a \equiv (-x, y, z)$ es el punto armónico asociado de P en AP.

Por consiguiente, el triángulo ABC es el triángulo ceviano de P en el triángulo $P_aP_bP_c$.

Teorema 1.5: Si el punto $P(x,y,z)$, generador de un triángulo ceviano, describe una recta ρ, la recta armónica asociada de P en el triángulo ABC, envuelve una cónica circunscrita al triángulo ABC. Las tangentes a la cónica en A,B y C, son los lados del triángulo cuyos vértices son los armónicos asociados del punto armónico asociado de ρ en el triángulo ABC.

Sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación de la recta ρ se cumple

$$A_1x + A_2y + A_3z = 0.$$

y, puesto que las coordenadas de ρ son $\rho \equiv (x^{-1}, y^{-1}, z^{-1})$, la envolvente resulta

$$\frac{A_1}{u} + \frac{A_2}{v} + \frac{A_3}{w} = 0,$$

cuya ecuación puntual se escribe

$$\frac{1}{A_1}yz + \frac{1}{A_2}zx + \frac{1}{A_3}xy = 0,$$

y las tangentes, por ejemplo, en los vértices B y C

$$\frac{1}{A_1}z + \frac{1}{A_3}x = 0$$

$$\frac{1}{A_1}y + \frac{1}{A_2}x = 0,$$

cuya intersección es el punto $(-\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_3})$, armónico asociado de R en el triángulo ABC, siendo R el punto armónico asociado de ρ en el mismo triángulo ABC.

El triángulo ABC es así el triángulo ceviano de R en $R_aR_bR_c$.

2.- CÓNICAS CIRCUNSCRITAS A PARES DE TRIÁNGULOS CEVIANOS

Las propiedades que estudiaremos, en las Secciones siguientes, relativas a pares de triángulos cevianos en el triángulo de referencia ABC, inscritos en una cónica, y, en particular, a los pares de triángulos cevianos concíclicos, se basan en los dos teoremas siguientes:

Teorema 2.1: Las segundas intersecciones de cada lado BC, CA, AB con cualquier cónica incidente con los vértices de un triángulo ceviano, son también los vértices de un segundo triángulo ceviano.
En el sistema de coordenadas homogéneas trilineales, referido al triángulo ABC, la ecuación general de una cónica se escribe,

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{12}xy + A_{23}yz + A_{31}zx = 0 \text{ , } \mathbf{(VI)}$$

y las ecuaciones de las respectivas intersecciones con cada uno de los lados BC, CA, AB

$$A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{23}yz = 0$$
$$A_{33}z^2 + A_{11}x^2 + A_{31}zx = 0 \quad \mathbf{(VII)}$$
$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{12}xy = 0 \, .$$

Si se aplican las notaciones y coordenadas siguientes relativas a los pares de puntos intersecciones de la cónica con cada lado BC, CA, AB, que son las respectivas soluciones de las tres ecuaciones anteriores

$$P_1 \equiv (0, y_1, z_1)\, , P_1' \equiv (0, y_1', z_1')$$
$$P_1 \equiv (x_2, 0, z_2)\, , P_1' \equiv (x_2', 0, z_2')$$
$$P_1 \equiv (x_3, y_3, 0)\, , P_1' \equiv (x_3', y_3', 0)\, ,$$

se verifican las relaciones siguientes entre los pares de raíces de cada ecuación

$$\frac{y_1}{z_1} \times \frac{y_1'}{z_1'} = \frac{A_{33}}{A_{22}}$$
$$\frac{z_2}{x_2} \times \frac{z_2'}{x_2'} = \frac{A_{11}}{A_{33}}$$
$$\frac{x_3}{y_3} \times \frac{x_3}{y_3'} = \frac{A_{22}}{A_{11}}\, ,$$

luego se cumple la relación

$$\frac{y_1 z_2 x_3}{z_1 x_2 y_3} \times \frac{y_1' z_2' x_3'}{z_1' x_2' y_3'} = 1 \, . \; \mathbf{(VIII)}$$

En virtud del Teorema 1.1, cada factor del primer miembro en **(VIII)**, para el valor uno, representa la condición **(I)** ceviana, el primero, del triángulo $P_1P_2P_3$, y el segundo, del triángulo $P_1'P_2'P_3'$. En consecuencia, si se cumple una de ellas, se verifica también la restante, por el valor común unidad del producto.

Se verifica igualmente el siguiente Teorema recíproco:
Teorema 2: Existe una cónica circunscrita a dos triángulos cevianos cualesquiera del triángulo ABC.
Sustituyendo en la ecuación **(VI)** de una cónica las coordenadas de los cevianos de dos puntos genéricos, $P(x, y, z)$ y $P'(x', y', z')$, y teniendo en cuenta las relaciones entre cada dos raíces de una ecuación de segundo grado, se obtienen los siguientes pares de relaciones en los coeficientes de **(VI)**,

$$\frac{y}{z}+\frac{y'}{z'}=-\frac{A_{23}}{A_{22}},\frac{y}{z}\times\frac{y'}{z'}=\frac{A_{33}}{A_{22}}$$
$$\frac{z}{x}+\frac{z'}{x'}=-\frac{A_{31}}{A_{33}},\frac{z}{x}\times\frac{z'}{x'}=\frac{A_{11}}{A_{33}} \quad \textbf{(IX)}$$
$$\frac{x}{y}+\frac{x'}{y'}=-\frac{A_{12}}{A_{11}},\frac{x}{y}\times\frac{x'}{y'}=\frac{A_{22}}{A_{11}}$$
luego, resolviendo este sistema homogéneo y lineal, en los coeficientes de **(VI)**, se obtiene la siguiente ecuación de la cónica circunscrita
$$\frac{X^2}{xx'}+\frac{Y^2}{yy'}+\frac{Z^2}{zz'}-XY\left(\frac{1}{xy'}+\frac{1}{yx'}\right)-YZ\left(\frac{1}{yz'}+\frac{1}{zy'}\right)-ZX\left(\frac{1}{zx'}+\frac{1}{xz'}\right)=0. \quad \textbf{(X)}$$
La ecuación **(X)** se escribe también en la siguiente forma alternativa,
$$\left(\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}\right)\left(\frac{X}{x'}+\frac{Y}{y'}+\frac{Z}{z'}\right)-2\left[XY\left(\frac{1}{xy'}+\frac{1}{yx'}\right)+YZ\left(\frac{1}{yz'}+\frac{1}{zy'}\right)+ZX\left(\frac{1}{zx'}+\frac{1}{xz'}\right)\right]=0,$$

y de esta segunda expresión se deduce,
Corolario 2.1: La cónica circunscrita a dos triángulos cevianos cualesquiera es un miembro de un haz definido por una cónica circunscrita al triángulo ABC y las rectas armónicas asociadas a los dos puntos generadores de cada triángulo.
En la **Ref.[1]** hemos llevado a cabo un estudio detallado del haz definido anterior en el contexto de la que hemos denominado *Geometría triple involutiva dual*, del que destacamos aquí como principal conclusión,
Corolario 2.2: Existen otros dos pares de puntos, generadores cada uno ellos de dos triángulos cevianos inscritos en cónicas de este mismo haz, que tienen comportamientos proyectivos simétricos con el par inicial de puntos, primeros determinantes del haz **(Refs.[2]** y **[3]**).

Por razón de brevedad, denominaremos cónicas cevianas a las cónicas circunscritas a dos triángulos cevianos, esto es, a las cónicas definidas por la ecuación general **(VI)**, cuyos coeficientes satisfacen las relaciones **(IX)** generalizadas, o, alternativamente, por la única forma **(X)**, que representa, directamente, la cónica incidente con dos triángulos cevianos. Una cuestión inmediata relacionada, es la concreción del número de grados de libertad de esta clase de cónicas.
En cuanto a la forma primera, definida por las ecuaciones **(VI)** y **(IX)** conjuntas, mediante eliminación de las seis relaciones $y/z, z/x, x/y, y/z', z'/x', x'/y'$, solamente cuatro de ellas independientes, se obtiene una relación única en los coeficientes A_{ij}, que será la condición necesaria que debe satisfacer una cónica circunscrita a un triángulo ceviano (realmente a dos). Además, puesto que el número de parámetros independientes en la ecuación general **(VI)** de una cónica cualquiera, es cinco, el de las cónicas así definidas, y, por tanto, su número de grados de libertad, es cuatro.
A la misma conclusión se llega mediante consideración de la forma unificada **(X)**, en la cual pueden considerarse como parámetros independientes, por ejemplo, las cuatro razones $y/z, x/z, y'/z', x'/z'$, que son dos a dos definitorias de los puntos P y P'.
Para la determinación de la condición necesaria indicada, en la expresión más general de una cónica, **(VI)**, operamos de la forma siguiente:
Utilizando las dos relaciones independientes $\alpha = x/y$ y $\beta = y/z$, resulta también $x/z = \alpha\beta$, luego las tres ecuaciones **(VII)** tienen la forma alternativa

$$A_{22}\beta^2 + A_{33} + A_{23}\beta = 0$$
$$A_{33} + A_{11}\alpha^2\beta^2 + A_{31}\alpha\beta = 0$$
$$A_{11}\alpha^2 + A_{22} + A_{12}\alpha = 0.$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones primera y segunda

$$\beta(A_{22} - A_{11}\alpha^2) = A_{31}\alpha - A_{23}$$

y, sustituyendo el valor de $A_{11}\alpha^2$ dado por la tercera

$$\beta = \frac{A_{31}\alpha - A_{23}}{2A_{22} + A_{12}\alpha},$$

luego, sustituyendo β en la primera, se obtiene el sistema reducido

$$A_{22}(A_{31}\alpha - A_{23})^2 + A_{33}(2A_{22} + A_{12}\alpha)^2 + A_{23}(A_{31}\alpha - A_{23})(2A_{22} + A_{12}\alpha)$$
$$A_{11}\alpha^2 + A_{22} + A_{12}\alpha = 0,$$

y, también

$$(A_{22}A_{31}^2 + A_{33}A_{12}^2 + A_{23}A_{31}A_{12})\alpha^2 + A_{12}(4A_{22}A_{33} - A_{23}^2)\alpha + A_{22}(4A_{22}A_{33} - A_{23}^2) = 0$$
$$A_{11}\alpha^2 + A_{12}\alpha + A_{22} = 0.$$

La eliminación de α es ya inmediata, obteniéndose la condición única buscada

$$A_{11}A_{23}^2 + A_{22}A_{31}^2 + A_{33}A_{12}^2 + A_{23}A_{31}A_{12} - 4A_{11}A_{22}A_{33} = 0, \quad \textbf{(XI)}$$

que resulta naturalmente simétrica en los coeficientes correspondientes de las tres coordenadas.

Volviendo ahora, de nuevo, a la consideración del número de grados de libertad de cónicas cevianas, si se consideran las cónicas incidentes, además, con dos puntos conocidos comunes, el número de grados de libertad será dos. Si se consideran las cónicas incidentes con tres puntos comunes las cónicas que cumplen la condición serán dependientes de un parámetro, y por ello tendrán todas ellas una envolvente común. Por último, las cónicas de un haz, incidentes con cuatro puntos dados, dependen de un parámetro lineal, y, por ello, las cónicas particulares del haz que cumplen la condición ceviana están determinadas por una ecuación en dicho parámetro, que, por ser sus coeficentes funciones lineales del parámetro, y teniendo en cuenta la anterior relación **(XI)** entre los mismos, resulta de grado tercero. Así, pues, el número de cónicas cevianas de un haz, es tres. Si el haz es el definido en el Corolario 2.1, estas tres cónicas son precisamente las tres cónicas asociadas a un mismo par de puntos generadores de dos triángulos cevianos, en el esquema de la triple geometría dual en la **Ref.[1]**.
Planteada esta misma cuestión de otro modo, puesto que una cónica está definida por cinco puntos, resulta también, de forma más limitada: las cónicas con dos puntos comunes, no situados en los lados del triángulo base, incidentes con los vértices de un triángulo ceviano, cortan de nuevo a los lados BC, CA, AB en vértices de un triángulo ceviano, lo que es una particularización del resultado, más general, del Teorema 2.1.

3.- CÓNICAS CEVIANAS INCIDENTES CON DOS Y/O TRES PUNTOS COMUNES

Consideremos la familia de cónicas incidentes con dos puntos comunes, cuya expresión general tiene la forma $\mathrm{K} \equiv \rho\rho' - K$, donde ρ y ρ' son rectas, la primera una recta particular, la definida por los dos puntos dados, y ρ' una recta cualquiera genérica, y K es una cónica particular de la familia, incidente, por tanto, con los dos puntos fijos, esto es, estando definidos estos dos puntos por las dos intersecciones $\rho.K$. La ecuación explícita de las cónicas se escribe

$$(A_1x + A_2y + A_3z)(ux + vy + wz) - (A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{12}xy + A_{23}yz + A_{31}zx) = 0\,,$$

(XII)

y depende, por tanto, de los tres parámetros u, v, w, que son las coordenadas tangenciales homogéneas de ρ'. La condición de incidencia de esta cónica con vértices de un triángulo ceviano, restringe el número de parámetros independientes a dos, ya que los coeficientes de **(XII)** deben satisfacer la condición necesaria **(XI)**.

Por otro lado, cualquier cónica incidente con los dos puntos comunes puede elegirse, sin pérdida de generalidad del planteamiento, como la cónica K, lo que supone una notable simplificación algebraica. Eligiendo, por ejemplo, la cónica incidente con los dos puntos dados y con los vértices del triángulo base, resultan $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$, siendo, pues, la ecuación de esta cónica

$$A_{12}xy + A_{23}yz + A_{31}zx = 0\,, \quad \textbf{(XIII)}$$

y la ecuación de la familia de cónicas incidentes con los dos puntos comunes´

$$(A_1x + A_2y + A_3z)(ux + vy + wz) - (A_{12}xy + A_{23}yz + A_{31}zx) = 0\,, \quad \textbf{(XIV)}$$

que admiten un par de triángulos cevianos inscritos si los coeficientes correspondientes satisfacen la condición **(XI)**, de nuevo.

En primer lugar, la forma ordenada explícita de **(XIV)** se escribe

$$A_1ux^2 + A_2vy^2 + A_3wz^2 + (A_1v + A_2u - A_{12})xy + (A_2w + A_3v - A_{23})yz + (A_3u + A_1w - A_{31})zx = 0\,,$$

y la anterior condición **(XI)** resulta

$$\begin{aligned} &A_1u(A_2w + A_3v - A_{23})^2 + A_2v(A_3u + A_1w - A_{31})^2 + A_3w(A_1v + A_2u - A_{12})^2 + \\ &+ (A_1v + A_2u - A_{12})(A_2w + A_3v - A_{23})(A_3u + A_1w - A_{31}) - 4A_1A_2A_3uvw = 0\,, \end{aligned}$$

y en la forma ordenada explícita, que utilizaremos más adelante,

$$\begin{aligned} &4A_1A_2A_3uvw + 2A_2A_3^2u^2v + 2A_3A_1^2v^2w + 2A_1A_2^2w^2u + 2A_1A_3^2v^2u + 2A_2A_1^2w^2v + 2A_3A_2^2u^2w + \\ &- A_2A_3A_{23}u^2 - A_3A_1A_{31}v^2 - A_1A_2A_{12}w^2 - \\ &- A_3(3A_1A_{23} + 3A_2A_{31} + A_3A_{12})uv - A_1(3A_2A_{31} + 3A_3A_{12} + A_1A_{23})vw - A_2(3A_3A_{12} + 3A_1A_{23} + A_2A_{31})wu + \\ &+ A_{23}(A_1A_{23} + A_2A_{31} + A_3A_{12})u + A_{31}(A_2A_{31} + A_3A_{12} + A_1A_{23})v + A_{12}(A_3A_{12} + A_1A_{23} + A_2A_{31})w - \\ &- A_{23}A_{31}A_{12} = 0. \end{aligned}$$

(XV)

Un caso concreto de especial interés, que satisface la condición **(XV)**, corresponde a la identificación de los puntos generadores de los triángulos cevianos inscritos en la cónica **(XIV)** con los armónicos asociados de las rectas ρ y ρ' en el triángulo ABC, que tienen coordenadas

$$P \equiv \left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2} \frac{1}{A_3}\right)$$

$$P' \equiv \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}\right),$$

y, expresando la incidencia de esta cónica con los puntos cevianos de P y P', se obtienen las tres relaciones

$$\frac{A_{12}}{A_1v + A_2u} = \frac{A_{23}}{A_2w + A_3v} = \frac{A_{31}}{A_3u + A_1w},$$

o las tres relaciones equivalentes

$$\frac{u}{A_1(-A_1A_{23}+A_2A_{31}+A_3A_{12})}=\frac{v}{A_2(A_1A_{23}-A_2A_{31}+A_3A_{12})}=\frac{w}{A_3(A_1A_{23}+A_2A_{31}+A_3A_{12})}.$$

Las dos relaciones independientes resultantes de estas tres igualdades, sustituyen, en este supuesto, a la condición única **(V)**, del caso general, que se satisface, obviamente, también. Las condiciones impuestas suponen, por tanto, la pérdida de un grado de libertad, de manera que las ecuaciones de las cónicas cevianas solución dependen de un solo parámetro. Por otro lado de las igualdades anteriores se deriva que esta dependencia es lineal, por lo que las cónicas citadas serán todas ellas miembros de un haz. Los dos triángulos cevianos inscritos son, asimismo, comunes para todas las cónicas.

El punto generador del segundo triángulo ceviano inscrito, es así,

$$P'\equiv\left([A_1(-A_1A_{23}+A_2A_{31}+A_3A_{12})]^{-1},[A_2(A_1A_{23}-A_2A_{31}+A_3A_{12})]^{-1},[A_3(A_1A_{23}+A_2A_{31}-A_3A_{12})]^{-1}\right).$$

En la siguiente Sección 4, mediante elección de los puntos cíclicos del plano como los dos puntos comunes, se hará la aplicación de estas expresiones en el análisis de pares de triángulos cevianos concíclicos.

Volviendo al caso general, relativo a las cónicas con sólo dos puntos comunes, la siguiente cuestión a resolver radica en la relación entre los puntos generadores de los dos triángulos cevianos asociados simultáneamente inscritos en el triángulo ABC y en la cónica K. Identificando las dos ecuaciones **(X)** y **(XIV)**, resultan

$$\theta=xx'.A_1u=yy'.A_2v=zz'.A_3w=$$

$$=-\frac{xx'yy'}{xy'+yx'}(A_1v+A_2u-A_{12})=-\frac{yy'zz'}{yz'+zy'}(A_2w+A_3v-A_{23})=-\frac{zz'xx'}{zx'+xz'}(A_3u+A_1w-A_{31}),$$

donde θ representa un parámetro auxiliar.

Observamos que con este planteamiento la exigencia adicional de la cumplimentación de la condición **(XI)** es superflua, pues está verificada implícitamente por la ecuación **(IX)**.

De las tres primeras igualdades se deducen

$$u=\frac{\theta}{A_1xx'},v=\frac{\theta}{A_2yy'},w=\frac{\theta}{A_3zz'},$$

y sustituyendo estas expresiones en las tres igualdades restantes

$$\theta=-\frac{xx'yy'}{xy'+yx'}\left(A_1\frac{\theta}{A_2yy'}+A_2\frac{\theta}{A_1xx'}-A_{12}\right),$$

y las dos expresiones análogas simétricas.

Operando en cada expresión anterior

$$\theta\left(A_1\frac{1}{A_2yy'}+A_2\frac{1}{A_1xx'}+\frac{1}{xy'}+\frac{1}{x'y}\right)=A_{12},$$

y también

$$\theta\left(\frac{A_1}{y'}+\frac{A_2}{x'}\right)\left(\frac{1}{A_2y}+\frac{1}{A_1x}\right)=A_{12}$$

luego

$$\theta(A_1x'+A_2y')(A_1x+A_2y)=A_{12}A_1A_2xx'yy'$$

En resumen

$$\frac{A_3}{A_{12}} zz'(A_1x' + A_2y')(A_1x + A_2y) = \frac{A_1}{A_{23}} xx'(A_2y' + A_3z)(A_2y + A_3z) = \frac{A_2}{A_{31}} yy'(A_3z' + A_1x')(A_3z + A_1x) =$$
$$= A_1A_2A_3xx'yy'zz'\theta^{-1}$$

Puesto que una cónica está inequívocamente definida por cinco puntos, no estando cuatro alineados, uno de los puntos generadores de un triángulo ceviano, puede ser elegido de manera casi arbitraria, lo que supone la anulación de los dos grados de libertad, y el punto generador del segundo triángulo resulta determinado inequívocamente.

Por otro lado, las ecuaciones anteriores, que relacionan los dos puntos P y P', representan una transformación involutiva de grado cuatro, T , aunque esta naturaleza cuártica no impide, como decimos, que exista entre ambos puntos una correspondencia biunívoca, esto es, de un punto a un sólo punto, y simétrica, es decir. del segundo también solamente al primero.

Las coordenadas de los puntos dobles de T son soluciones del sistema

$$\frac{A_3}{A_{12}} Z^2(A_1X + A_2Y)^2 = \frac{A_1}{A_{23}} X^2(A_2Y + A_3Z)^2 = \frac{A_2}{A_{31}} Y^2(A_3Z + A_1X)^2 \quad \textbf{(XVI)}$$

La citada transformación T, tal que $P = TP'$, y recíprocamente $P' = TP$, es el producto simétrico, $T = T_1T_2T_1$, de tres transformaciones cuadráticas en el orden que se menciona, con las siguientes definiciones de cada factor T_1 y T_2:

1) T_1 es una inversión triangular referida al triángulo ABC, de puntos dobles el incentro I y los tres exincentros I_1, I_2, I_3. El triángulo de referencia ABC es, como corresponde a esta definición, el triángulo diagonal del cuadrángulo I, I_1, I_2, I_3. Los cuatro puntos I, I_1, I_2, I_3 constituyen un conjunto de puntos armónicamente asociados con relación al triángulo ABC.

2) T_2 es una transformación cuadrática involutiva referida cuyos puntos dobles son las soluciones del sistema

$$\frac{A_3}{A_{12}}(A_1Y + A_2X)^2 = \frac{A_1}{A_{23}}(A_2Z + A_3Y)^2 = \frac{A_2}{A_{31}}(A_3X + A_1Z)^2, \quad \textbf{(XVII)}$$

que se descompone en cuatro sistemas homogéneos lineales, cuyos cuatro puntos solución se escriben en la forma general

$$D \equiv \begin{pmatrix} A_1[-(A_1A_{23})^{\frac{1}{2}} + (A_2A_{31})^{\frac{1}{2}} + (A_3A_{12})^{\frac{1}{2}}], A_2[(A_1A_{23})^{\frac{1}{2}} - (A_2A_{31})^{\frac{1}{2}} + (A_3A_{12})^{\frac{1}{2}}], \\ A_3[(A_1A_{23})^{\frac{1}{2}} + (A_2A_{31})^{\frac{1}{2}} - (A_3A_{12})^{\frac{1}{2}}] \end{pmatrix},$$

mientras las coordenadas de los otros tres puntos dobles D_1, D_2 y D_3 son las resultantes de los cambios alternativos del signo de cada radical $(A_1A_{23})^{1/2}, (A_2A_{31})^{1/2}, (A_3A_{12})^{1/2}$.

El triángulo de referencia de la transformación T_2 es el triángulo diagonal del cuadrángulo $DD_1D_2D_3$, cuyos vértices tienen coordenadas

$$V_1 \equiv (-A_1, A_2, A_3), V_2 \equiv (A_1, -A_2, A_3), V_3 \equiv (A_1, A_2 - A_3),$$

que son los tres puntos armónicos asociados de $V \equiv (A_1, A_2, A_3)$ en el triángulo de referencia ABC, y, también, los vértices del triángulo circunscrito a la cónica K, cuyos lados son las respectivas tangentes en A, B y C.

Los cuatro puntos dobles de la transformación T_2 constituyen, igualmente, un conjunto de cuatro puntos armónicos asociados con relación a este último triángulo circunscrito.

Podemos obtener, además, una caracterización geométrica de los puntos dobles de ambas transformaciones T ,que son las soluciones del sistema (X**VI)**, y T_2, que son las soluciones del sistema **(XVII)**, a partir de las deducciones siguientes:
En primer lugar, los cuatro puntos dobles ordinarios de T, son, obviamente, los puntos cuyos triángulos cevianos tienen como vértices los puntos de tangencia con cada lado de las cónicas inscrita y exinscritas en el triángulo ABC, incidentes con los dos puntos comunes de la familia indicada de cónicas.
Si Δ es un punto doble de T, debe verificarse $T(\Delta) = \Delta$, y aplicando seguidamente una transformación T_1, se cumple también

$$T_1(\Delta) = T_1 T_1 T_2 T_1(\Delta).$$

La condición involutiva de la transformación T_1 equivale a $T_1 T_1 \equiv I$, siendo I una identidad, y, por tanto, $T_1(\Delta) = T_2(T_1\Delta)$, luego los cuatro puntos dobles de T_2 son, además, los transformados en T_1, esto es, los inversos, de los cuatro puntos dobles ordinarios de T.
Por extensión, se pueden considerar igualmente puntos dobles no ordinarios de T, los vértices A, B y C del triángulo base, que satisfacen igualmente el sistema **(IX)**. En estos tres casos la cónica incidente con los dos puntos comunes sería la cónica degenerada, unión de las rectas que unen el vértice correspondiente a los dos puntos fijos comunes.

Por otro lado, en la definición de la transformación T como producto de tres transformaciones involutivas cuadráticas, hemos considerado la inversión triangular en el triángulo ABC, como elección más sencilla de la transformación T_1, aunque pudiera elegirse una transformación análoga cualquiera, referida al triángulo ABC, esto es $T = T_1' T_2' T_1'$, siendo entonces T_2' la transformación cuyos puntos dobles son imagen de los cuatro puntos dobles ordinarios de T, a los que hemos asignado la notación genérica Δ, en la nueva transformación inicial elegida, T_1'.

Si se consideran las cónicas incidentes con tres puntos fijos, resulta una familia de cónicas con un solo grado de libertad, y ello supone que no resulta posible la elección de un punto generador concreto, aunque si puede elegirse un punto situado en una curva determinada, por ejemplo, en una recta incidente con un vértice del triángulo ABC, lo que implica una condición adicional. Además, como hemos adelantado, en este segundo supuesto, las cónicas de la familia tendrán una envolvente común. Aquí debemos advertir que no es admisible, en general, la simplificación efectuada de la ecuación de la cónica K en **(XIII)**, debiendo añadirse un término adicional, lo que supone la sustitución de uno de los vértices por el tercer punto fijo en la elección de esta cónica K.

4.- CÓNICAS CEVIANAS INCIDENTES CON CUATRO PUNTOS COMUNES

Consideraremos, finalmente, la aplicación de las deducciones anteriores al análisis de una familia aún más restringida de cónicas, en concreto, a la familia de cónicas con cuatro puntos fijos comunes, no coincidentes con los vértices del triángulo base, esto es, a las cónicas miembros de un haz.
Suponiendo ahora fijadas las ecuaciones de una cónica del haz, K, y de dos rectas ρ, ρ', cuya unión es, igualmente, una cónica degenerada del haz, la ecuación general de una cónica miembro del haz se escribe:

$$(A_1x + A_2y + A_3z)(B_1x + B_2y + B_3z) - \lambda(A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{23}yz + A_{31}zx) = 0,$$

(XVIII)

La cónica particular K, miembro del haz, ahora elegida, es la cónica incidente con los cuatro puntos fijos y con el vértice $C \equiv (0,0,1)$, lo que no supone pérdida de generalidad del análisis.

La condición ceviana de la cónica, definida por **(XV)**, resulta

$$\begin{aligned}&(A_1 - \lambda A_{11})B_1[(A_2 - \lambda A_{22})B_3 + A_3B_2 - \lambda A_{23}]^2 + (A_2 - \lambda A_{22})B_2[A_3B_1 + (A_1 - \lambda A_{11})B_3 - \lambda A_{31}]^2\\ &+ A_3B_3[(A_1 - \lambda A_{11})B_2 + (A_2 - \lambda A_{22})B_1 - \lambda A_{12})^2 + [(A_1 - \lambda A_{11})B_2 + (A_2 - \lambda A_{22})B_1 - \lambda A_{12}]\times\\ &\times[(A_2 - \lambda A_{22})B_3 + A_3B_2 - \lambda A_{23}][(A_3B_1 + (A_1 - \lambda A_{11}B_3 - \lambda A_{31}) - 4(A_1 - \lambda A_{11})(A_2 - \lambda A_{22})A_3B_1B_2B_3 = 0.\end{aligned}$$

(XIX)

La ecuación cúbica resultante, **(XVIII)**, da los valores de los tres parámetros correspondientes a las tres cónicas del haz que detentan la condición ceviana.

La ecuación **(XVIII)** del haz y la ecuación resolvente de las cónicas del haz que verifican la condición ceviana se simplifican si los cuatro puntos que definen el haz pertenecen a una cónica circunscrita al triángulo ABC, en cuyo caso se pueden elegir nuevamente $A_{11} = A_{22} = 0$, y, por tanto, las ecuaciones **(XVIII)** y **(XIX)** serán, respectivamente,

$$(A_1x + A_2y + A_3z)(B_1x + B_2y + B_3z) - \lambda(A_{12}xy + A_{23}yz + A_{31}zx) = 0, \quad \textbf{(XX)}$$

$$\begin{aligned}&A_1B_1(A_2B_3 + A_3B_2 - \lambda A_{23})^2 + A_2B_2(A_3B_1 + A_1B_3 - \lambda A_{31})^2 + A_3B_3(A_1B_2 + A_2B_1 - \lambda A_{12})^2 +\\ &+(A_1B_2 + A_2B_1 - \lambda A_{12})(A_2B_3 + A_3B_2 - \lambda A_{23})(A_3B_1 + A_1B_3 - \lambda A_{31}) - 4A_1A_2A_3B_1B_2B_3 = 0.\end{aligned} \quad \textbf{(XXI)}$$

Nos interesará, además, especialmente, en este mismo supuesto, el subcaso, coincidente con el anteriormente considerado en la Sección 3, en que estas tres cónicas son precisamente las tres cónicas asociadas a un mismo par de puntos generadores de dos triángulos cevianos, en el esquema de la triple geometría dual, lo que supone la sustitución de la anterior condición **(XXI)**, que sigue, naturalmente, verificándose, por dos relaciones específicas entre los restantes coeficientes de las ecuaciones de la cónica K y las rectas ρ, ρ'.

Este es, precisamente, el caso particular de mayor interés, analizado en profundidad en la **Ref.[1]**, en el contexto de la geometría triple involutiva dual, el cual corresponde a la identificación de los puntos generadores de los triángulos cevianos inscritos en la cónica $\mathrm{K} \equiv \rho\rho' - \lambda K$, con los armónicos asociados de las rectas ρ y ρ' en el triángulo ABC, que tienen coordenadas

$$P \equiv \left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_3}\right)$$

$$P' \equiv \left(\frac{1}{B_1}, \frac{1}{B_2}, \frac{1}{B_3}\right).$$

Se obtiene una primera raíz explícita de la ecuación **(XXI)**, sustituyendo, por ejemplo, en la ecuación **(XX)** de la cónica

$$P_1 \equiv \left(0, \frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_3}\right),$$

que da el valor del parámetro

$$\lambda_1 = \frac{2}{A_{23}}(B_2A_3 + B_3A_2),$$

debiendo verificarse también las dos relaciones simétricas análogas, esto es

$$\frac{2}{\lambda_1} = \frac{A_{12}}{A_1B_2 + A_2B_1} = \frac{A_{23}}{A_2B_3 + A_3B_2} = \frac{A_{31}}{A_3B_1 + A_1B_3}. \quad \textbf{(XXII)}$$

La comprobación de esta raíz, que hemos llamado λ_1, resulta inmediata, pues, cumpliéndose las relaciones **(XXII)**, la ecuación **(XXI)** se anula, en efecto, para λ_1,

$$A_1B_1(A_2B_3 + A_3B_2)^2 + A_2B_2(A_3B_1 + A_1B_3)^2 + A_3B_3(A_1B_2 + A_2B_1)^2 -$$
$$-(A_1B_2 + A_2B_1)(A_2B_3 + A_3B_2)(A_3B_1 + A_1B_3) - 4A_1A_2A_3B_1B_2B_3 \equiv 0.$$

La ecuación se escribe también

$$(A_1B_1A_{23}^2 + A_2B_2A_{31}^2 + A_3B_3A_{12}^2)(2\lambda - \lambda_1)^2 - 2A_{23}A_{31}A_{12}(2\lambda - \lambda_1)^3 + 16A_1A_2A_3B_1B_2B_3 = 0,$$

luego, aplicando las relaciones de Cardano, se cumple para las otras dos raíces, λ_2 y λ_3

$$\left.\begin{aligned}(2\lambda_2 - \lambda_1) + (2\lambda_3 - \lambda_1) &= \frac{A_1B_1A_{23}^2 + A_2B_2A_{31}^2 + A_3B_3A_{12}^2}{2A_{23}A_{31}A_{12}} - \lambda_1 \\ (2\lambda_2 - \lambda_1)(2\lambda_3 - \lambda_1) &= \frac{8A_1A_2A_3B_1B_2B_3}{A_{23}A_{31}A_{12}} \times \frac{1}{\lambda_1},\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(XXIII)}$$

que permiten obtener los parámetros λ_2 y λ_3 mediante una ecuación de segundo grado.

Se deriva también que las tres cónicas obtenidas mediante la ecuación **(XXI)**, son los tres únicos miembros del haz que satisfacen la condición ordinaria ceviana. Por otro lado, las obtenidas explícitamente mediante **(XXII)** y **(XXIII)**, representan la única terna de cónicas simétricamente asociadas en el contexto de la geometría triple dual desarrollado en la **Ref.[1]**. Hay, pues, una diferencia sustancial entre la terna de cónicas cevianas, resultantes de **(XXI)**, que existen siempre en un haz cualquiera de cónicas, y la terna correspondiente a un haz definido por una cónica ceviana y las rectas armónicas asociadas a los puntos generadores de esta cónica concreta. Sólo en esta segunda definición, las tres cónicas solución y los tres pares de puntos generadores mantienen otras simetrías proyectivas adicionales en las que se basa el indicado desarrollo de la geometría triple involutiva dual (**Ref.[3]**).

Con carácter extraordinario pudiera agregarse, considerada también como ceviana, la cónica circunscrita al triángulo, relacionada con la naturaleza especial apuntada de los tres vértices A, B y C, como puntos dobles de la transformación T, aunque no existan para estos puntos triángulos cevianos propios.

La ecuación de esta cónica circunscrita corresponde al valor del parámetro $\lambda = \infty$, y se expresa, teniendo en cuenta las relaciones **(XIX)**,

$$(A_1B_2 + A_2B_1)yz + (A_2B_3 + A_3B_2)zx + (A_3B_1 + A_1B_3)xy = 0. \quad \textbf{(XXIII)}$$

En esta segunda alternativa, el triángulo ABC es un triángulo ceviano en el triángulo de lados las tangentes en cada vértice a la cónica **(XXIII)**, cuyo punto generador tiene coordenadas

$$Q \equiv \left(\frac{1}{A_2B_3 + A_3B_2}, \frac{1}{A_3B_1 + A_1B_3}, \frac{1}{A_1B_2 + A_2B_1} \right).$$

El punto Q y los tres vértices del triángulo circunscrito constituyen un conjunto de puntos armónicamente asociados con relación al triángulo ABC.

La cónica **(XXIII)** y cada recta tangente en uno de los vértices A, B o C generan tres haces de cónicas cuyos miembros mantienen, todos ellos, la propiedad ceviana en el triángulo ABC, en el segundo sentido extraordinario de referencia indicado.

5.- TRIÁNGULOS CEVIANOS CONCÍCLICOS

En esta Sección se refieren las deducciones anteriores, relativas a cónicas, en general, a circunferencias incidentes con pares de triángulos cevianos, y, en concreto, al caso particular en el que el haz definido por las tres soluciones asociadas es un haz de circunferencias.
En primer lugar la familia de cónicas incidentes con dos puntos comunes, dada por la ecuación **(XIV)**, es una familia de circunferencias si se eligen como puntos comunes los dos puntos cíclicos impropios del plano. La cónica K puede elegirse, sin pérdida de generalidad, como la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y la recta ρ es la recta impropia del plano, y la ecuación general de estas circunferencias se escribe

$$(ax+by+cz)(ux+vy+wz)-(cxy+ayz+bzx)=0,$$

y en la forma explícita ordenada

$$aux^2+bvy^2+cwz^2+(av+bu-c)xy+(bw+cv-a)yz+(cu+aw-b)zx=0,$$

donde a,b,c son las longitudes de los lados del triángulo ABC.
La condición ceviana **(XV)** tiene ahora las formas alternativas

$$\begin{aligned}&au(bw+cv-a)^2+bv(cu+aw-b)^2+cw(av+bu-c)^2+\\&+(av+bu-c)(bw+cv-a)(cu+aw-b)-4abcuvw=0,\end{aligned}$$

y en la forma ordenada explícita,

$$\begin{aligned}&-4abcuvw+2bc^2u^2v+2ca^2v^2w+2ab^2w^2u+2ac^2v^2u+2ba^2w^2v+2cb^2u^2w+\\&-abcu^2-abcv^2-abcw^2-\\&-c(3a^2+3b^2+c^2)uv-a(3b^2+3c^2+a^2)vw-b(3c^2+3a^2+b^2)+\\&+a(a^2+b^2+c^2)u+b(a^2+b^2+c^2)v+c(a^2+b^2+c^2)w-abc=0.\end{aligned} \quad \textbf{(XXIV)}$$

La correspondencia entre los puntos generadores de los dos triángulos cevianos inscritos, se define mediante la siguiente transformación cuártica

$$zz'(ax'+by')(ax+by)=xx'(by'+bz)(by+cz)=yy'(cz'+ax')(cz+ax)=abcxx'yy'zz'\theta^{-1}$$

cuyos puntos dobles ordinarios, además de los vértices A,B,C, que son puntos dobles especiales, son, obviamente, el punto de Gergonne y sus adjuntos, esto es, sustituyendo los valores $A_1=A_{23}=a$, $A_2=A_{31}=b$, $A_3=A_{12}=c$, en las coordenadas inversas de los puntos D,D_1,D_2,D_3, obtenidas en la Sección 3,

$$\Gamma\equiv\left(\frac{1}{a(-a+b+c)},\frac{1}{b(a-b+c)},\frac{1}{c(a+b-c)}\right),$$

mientras las coordenadas de los otros tres puntos dobles Γ_1,Γ_2 y Γ_3 son las resultantes de los cambios alternativos del signo de cada valor a,b y c únicamente en los segundos factores de los tres denominadores.
Los dos puntos generadores de dos triángulos cevianos concíclicos se corresponden en la transformación cuártica producto $T=T_1T_2T_1$, donde T_1 es la inversión triangular, referida al triángulo ABC y T_2 es la transformación cuadrática cuyos puntos dobles son los inversos de los puntos $\Gamma,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$. El triángulo de referencia en T_2, o sea, el triángulo diagonal del cuadrángulo $\Gamma\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ es el triángulo de vértices los armónicos conjugados del punto de Lemoine del triángulo ABC, esto es, el triángulo de lados las tangentes a la circunferencia circunscrita en A,B y C.

Si consideramos las circunferencias de un haz, es decir, las circunferencias con dos puntos arbitrarios comunes, con excepción de los vértices A,B y C, en el caso general la ecuación a aplicar es la **(XVIII)**, con las particularidades de que la recta ρ es la recta impropia, y la cónica K una circunferencia cualquiera, y, por tanto, la ecuación tendrá la forma siguiente

$$(ax+by+cz)(B_1x+B_2y+B_3z)-\lambda[cxy+ayz+bzx+(C_1x+C_2y+C_3z)(ax+by+cz)]=0,$$

o, también

$$(ax+by+cz)[(B_1-\lambda C_1)x+(B_2-\lambda C_2)y+(B_3-\lambda C_3)z]-\lambda(cxy+byz+czx)=0.$$

Omitimos la expresión de la ecuación de la condición ceviana que permite la obtención de las tres circunferencias cevianas del haz. Como en la Sección 4 interesa, en particular, el caso en que la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es una circunferencia del haz, lo que supone que los dos puntos comunes en el eje radical están en esta circunferencia. En este supuesto se anulan los coeficientes $C_1,C_2,C_3\equiv 0$ y la ecuación anterior se identifica con **(XXIV)** para valores $u=\lambda B_1$, $v=\lambda B_2$, $w=\lambda B_3$.

Debemos advertir aquí, como haremos referencia detallada al final de esta Sección, que las tres circunferencias cevianas del haz, así obtenidas, no mantienen entre sí la triple simetría dual, que se produce únicamente en el caso particular en el que los puntos generadores de los triángulos cevianos inscritos en la cónica K son los armónicos asociados de la recta impropia, que es el centro de gravedad, G, de ABC y de ρ', que tienen coordenadas respectivas

$$G\equiv\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$$

$$P'\equiv\left(\frac{1}{B_1},\frac{1}{B_2},\frac{1}{B_3}\right),$$

y, expresando la incidencia de K con los puntos cevianos de G y P', se obtienen las tres relaciones

$$\frac{c}{av+bu}=\frac{a}{bw+cv}=\frac{b}{cu+aw},$$

o las tres relaciones equivalentes

$$aB_2+bB_1=\lambda^{-1}c$$

$$bB_3+cB_2=\lambda^{-1}a$$

$$cB_1+aB_3=\lambda^{-1}b$$

y, resolviendo este sistema homogéneo

$$\frac{B_1}{a(c^2+b^2-a^2)}=\frac{B_2}{b(a^2-b^2+c^2)}=\frac{B_3}{c(a^2+b^2-c^2)},$$

o también

$$\frac{B_1}{\cos A}=\frac{B_2}{\cos B}=\frac{B_3}{\cos C}$$

y, por tanto, también,

$$P'\equiv\left(\frac{1}{\cos A},\frac{1}{\cos B},\frac{1}{\cos C}\right)$$

Luego el punto asociado con G que genera la circunferencia incidente con dos triángulos cevianos es, efectivamente, como es bien sabido, el ortocentro, H, y la circunferencia tiene la denominación conocida del círculo de los nueve puntos.

Los valores del parámetro λ, correspondientes a las tres circunferencias cevianas en el haz generado por el par (G, H) y las respectivas rectas armónicas asociadas, que son la recta impropia y el eje órtico del triángulo ABC, resultan, según las expresiones **(XXII)** y **(XXIII)**,

$$\lambda_1 = \frac{2(a\cos B + b\cos A)}{c} = \frac{2c}{c} = 2$$

$$(2\lambda_2 - \lambda_1) + (2\lambda_3 - \lambda_1) = \frac{a^3\cos A + b^3\cos B + c^3\cos C}{2abc} - 2$$

$$(2\lambda_2 - \lambda_1)(2\lambda_3 - \lambda_1) = \frac{8abc\cos A\cos B\cos C}{abc} \times \frac{1}{2} = 4\cos A\cos B\cos C,$$

y, teniendo en cuenta la siguiente relación

$$a^3\cos A + b^3\cos B + c^3\cos C = a(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\cos A + b(c^2 + a^2 - 2ca\cos B)\cos B +$$
$$+ c(a^2 + b^2 - 2ac\cos B)\cos C = ab(b\cos A + a\cos B) + bc(c\cos B + b\cos C) + ca(a\cos C + c\cos A) -$$
$$- 2abc(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = 3abc - 2(1 - 2\cos A\cos B\cos C) = abc(1 + 4\cos A\cos B\cos C),$$

luego, llamando $p = \cos A\cos B\cos C$, los valores λ_2 y λ_3 del parámetro λ, correspondientes a las dos circunferencias cevianas simétricamente asociadas al círculo de los nueve puntos, son las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - 4p\lambda - 4p = 0.$$

Puesto que el discriminante $\Delta = 4p(p+1)$ es positivo/negativo según que el triángulo ABC sea acutángulo/obtusángulo, los valores λ_2 y λ_3 son respectivamente reales/imaginarios en uno y otro caso. Además, en el segundo, las dos circunferencias son, por tanto, imaginarias también, mientras en el primero su naturaleza, real o imaginaria, resulta, todavía, dudosa. En el estudio dual, más completo, en la **Ref.[1]** se demuestra que una de las dos circunferencias es real y otra imaginaria, aunque los dos pares de puntos generadores de los triángulos cevianos inscritos, en uno y otro caso, son también imaginarios. En la **Ref.[1]** figura también la construcción geométrica de estas circunferencias.

Así pues, en cuanto a la justificación, entre otras, de las mencionadas peculiaridades que se derivan de esta elección tan particular, nos remitimos a la **Ref.[1]**, que incluye la concepción de una triple simetría dual entre los tres pares de puntos generadores de las tres circunferencias cevianas del haz. Destacamos aquí, únicamente, la diferencia principal entre las ternas de circunferencias cevianas en un haz de circunferencias cualquiera y la terna asociada a la elección concreta del par (G, H).

En efecto, en el contexto de la triple simetría dual, que se desarrolla en la **Ref.[1]**, cada par individual de dos puntos generadores de dos triángulos cevianos concíclicos, distinto del par (G, H), estará asociado a otros dos pares de puntos con comportamientos proyectivos simétricos. Ello supone que cada par estará asociado a una cónica circunscrita a los dos triángulos cevianos de los puntos del par, la cual será un miembro del haz de cónicas definido por la circunferencia solución y la cónica degenerada producto de las rectas armónicas asociadas a cada punto del par solución inicial. Pero**, a diferencia de la elección del par (*G,H*)** estas dos cónicas que completan la terna, **no son ya circunferencias**. La única circunferencia de este haz de cónicas es la correspondiente al par inicial de los dos puntos generadores del haz.

Recíprocamente, la única solución de una terna de circunferencias solución simétricamente asociadas, es decir pertenecientes las tres al haz definido por una circunferencia solución y las rectas armónicas asociadas a cada punto del par

generador de la misma, fue la presentada en la opinión anterior en la que se obtenía un haz de circunferencias de eje radical el eje órtico del triángulo. En esta circunstancia estuvo basada nuestra respuesta relativa a la unicidad de las otras dos circunferencias solución que, con el círculo de Euler-Feuerbach, integraban la terna. Las principales propiedades geométricas características de esta terna se describían también en aquella opinión.
Finalmente, por supuesto cualquier otra circunferencia con dos triángulos cevianos inscritos, diferente del círculo de los nueve puntos y de sus dos circunferencias asociadas, tendrá como asociadas propias otras dos cónicas, ¡que no son ya circunferencias!, pues no pertenecerán al mismo haz anterior de circunferencias, el generado por los puntos G y H, sino al propio haz de cónicas generado por la circunferencia elegida. La única circunferencia en este nuevo haz, será, precisamente, de nuevo, la propia circunferencia seleccionada. Así, por ejemplo, el haz generado por la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, que verifica una doble incidencia con cada vértice de un único triángulo ceviano, es un haz de cónicas bitangentes en los puntos intersección de la circunferencia inscrita con la recta armónica asociada al punto de Gergonne Γ, siendo, efectivamente, la inscrita, la única circunferencia del haz.

REFERENCIAS

[1] *http://www.bubok.es/libros/211306/GEOMETRIA-DUAL-INVOLUTIVA-EN-ESPACIOS-MULTIDIMENSIONALES*
[2] La magia del tres (*La Voz del Colegiado*, núm.355,pp.26-28)
http://www.ciccp.es/webantigua/rop/boletin/268/Pablo_Rubio.pdf
[3] Algunas precisiones sobre pares y ternas de pares de triángulos cevianos (*La Voz del Colegiado*, núm.357,pp.17-19)
http://www.ciccp.es/webantigua/rop/boletin/270/Pablo_Rubio.pdf