

un plan muy estricto de las mismas para un período mínimo de diez años, de los que los tres primeros se deben emplear en estudios de rentabilidad y retorno de las inversiones previstas, así como en procesos de información pública y ambiental.

3. La prioridad y mejora de la red debe centrarse, en épocas de crisis, en la mejora de las carreteras, mal denominadas, secundarias, en las que se concentra la mayor accidentalidad, pero a la vez en las que con menor presupuesto se consiguen mejores resultados y retornos para la sociedad. Estas carreteras son el principio y fin de los trayectos diarios de los ciudadanos de los municipios. Son las que sirven para acceder diariamente a los servicios de educación, salud y servicios sociales; y a la vez suponen las arterias para abastecer de productos básicos a la población, sirviendo de conectividad para el desarrollo normal de las pymes.

4. La inversión en la mejora y conservación de las carreteras produce un retorno impositivo al estado próximo al 50 %, de manera que resulta muy eficiente para las arcas públicas desarrollar programas en este sector.

Se calcula que del 1 % del PIB de inversión en infraestructuras, retorna como pago directo por IVA el 0,21 %, y por otros impuestos directos e indirectos el 0,06 % y por aumento de recaudación de cotizaciones sociales relacionadas con el

empleo el 0,11 %, sin perjuicio del ahorro que supone dejar de abonar prestaciones por desempleo.

5. El pago por uso de las carreteras, planteado en algunos foros de discusión, no debe ser aplicado en períodos de recesión económica. Debe aplazarse su estudio e implantación a un período de crecimiento del PIB y sobre todo, del empleo. Debe garantizarse asimismo, que la recaudación obtenida debe ser únicamente para la conservación y mejora de todas las carreteras.

6. Aunque vayamos a contracorriente del derroche que se sigue realizando, continuando la fiesta de los despropósitos, hay que comenzar a decir en voz alta que se debe frenar la aportación de fondos públicos hacia ciertos tramos de ferrocarril de alta velocidad que no van a financiar, cuando estén en marcha, ni siquiera el 50 % de los gastos de explotación, sin incluir las amortizaciones de las inversiones realizadas.

Párese de una vez la sangría de recursos públicos en infraestructuras innecesarias y no rentables, para poder reasignar los fondos disponibles a actuaciones de mayor rentabilidad social y económica, que sean generadoras de mayores tasas de empleo con el mayor retorno impositivo a las arcas públicas. ■

Una aplicación del Teorema de Routh relativa a áreas triangulares

por Pablo Rubio Pérez

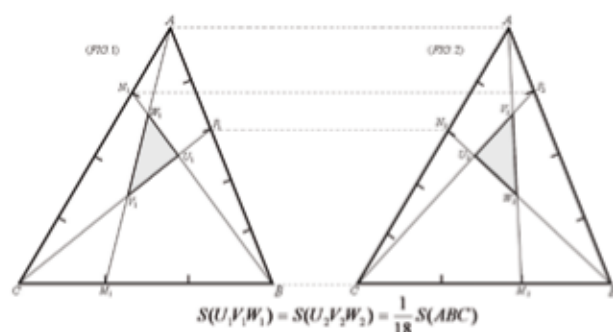
Colegiado nº 1.588

Nuestro compañero David Vergés, con quien mantengo una comunicación, aunque intermitente, empática por e-mail, minorativa de la distancia generacional que nos separa, desafortunadamente para mí únicamente en lo racional, ya que no temporal, nos sorprende a los aficionados a la geometría con analogías y resultados curiosos derivados de la utilización de deducciones elementales (así en los nºs 326, 343, 363, 365, 366, 367 de La Voz). La publicación anterior de alguno de estos resultados obtenido por profesionales matemáticos mediante procedimientos más sofisticados, incluida la aplicación particularizada de teoremas más generales, no empuja la originalidad y sencillez de su propio planteamiento deductivo, en cualquier caso, más accesible.

Me refiero aquí en concreto a su comunicación en el nº 367 de La Voz, relativa a la presentación de un triángulo cuyos lados son las rectas de unión de cada vértice con puntos situados en tercios de los lados opuestos en un orden cíclico y cuya área es $\frac{1}{7}$ del área del triángulo base.

Antecedentes de este mismo resultado figuran, por ejemplo, en cuanto a referencias precisas del resultado obtenido por Vergés, en *Mathematical Snapshots*, Oxford University Press, 1983, del prestigioso matemático polaco Hugo Steinhaus, autor de numerosas creaciones de la geometría recreativa del mayor interés y sumamente ingeniosas, que incluye en sus páginas 8 y 9 (figuras 13 y 14), una elegante demostración,

exclusivamente gráfica, relativa a aquella misma disposición geométrica. Y dos más, la primera limitada específicamente también al mismo resultado del área en Geometría Interactiva, Teoremas sobre Triangles, Ricard Peiró, 2000-2007-2013, y la segunda con una multiplicidad de diversos resultados adicionales análogos, en la publicación Problemas divulgativos, F. Damián Aranda y M. Gómez Lara (Epsilon, Revista de Educación Matemática, Vol. 28 (2), n° 78, pp.99-109, 2011), deducidos en ambos casos, como particularizaciones del teorema de Routh, poco divulgado en los textos matemáticos comunes, no obstante su significación como esquema generalizado del teorema, éste sí muy vulgarizado, de Ceva. Nuestro comentario, a continuación, se refiere a la descripción y extensiones propias complementarias, de la fórmula enunciada por Routh en *A treatise on Analytical Statics, with numerous examples*, E. J. Routh (Cambridge University Press, Vol. 1, p.82, 1891).



Sea el triángulo ABC y M,N,P puntos situados en cada lado AB,BC,CA. La definición precisa de los puntos M,N,P se establece mediante las razones simples signadas

$$r_1 = \frac{BM}{MC}, r_2 = \frac{CN}{NA}, r_3 = \frac{AP}{PB}$$

Las rectas AM,BN,CP con las denominaciones alternativas de cevianas/seudocevianas en ambos supuestos de concurrencia/no concurrencia determinan, en el primero, un punto común, Q, y, en el segundo el triángulo UVW con U=BN.CP, V=CP.AM, W=AM.BN. La representación en la Fig. 1, en la que se aplica a los puntos distintos de los vértices el subíndice 1 adicional, en orden a la diferenciación entre dos triángulos análogos que estableceremos más adelante, corresponde a la terna de valores particulares $r_1=2, r_2=3, r_3=2/3$.

El teorema enunciado sin demostración, seguramente por la simplicidad de la misma, en cuanto a una aplicación elemental de la métrica, por el Prof. Edward John Routh, más

conocido por su aportación en el teorema denominado de Routh-Hurwitz relativo a un criterio de estabilidad de sistemas dinámicos, campo éste más afín a nuestra propia dedicación profesional, se refiere a la siguiente expresión del área del triángulo UVW,

$$S_{UVW} = \frac{(r_1 r_2 r_3 - 1)^2}{(r_1 r_2 + r_1 + 1)(r_2 r_3 + r_2 + 1)(r_3 r_1 + r_3 + 1)} S_{ABC} \quad (I)$$

El supuesto $r_1 r_2 r_3 - 1 = 0$ da el valor $S_{UVW} = 0$ y corresponde al de concurrencia de tres rectas cevianas, obteniéndose así la conocida relación expresiva del Teorema de Ceva, como un subproducto del Teorema de Routh, mientras en el caso $r_1=r_2=r_3=1/2$ se obtiene efectivamente el resultado obtenido más directamente por D. Vergés con utilización de la transformación afín. Las dos segundas referencias arriba indicadas, comprenden una deducción completa de la expresión (I), y de otras diversas aplicaciones de la misma en la tercera, que incluyen el resultado citado como su aplicación eventual más simplista.

Destacamos, asimismo, las siguientes propiedades adicionales que no aparecen en ninguna de las referencias anteriormente mencionadas.

En primer lugar, se comprueba fácilmente, también, que la anulación de un factor cualquiera del denominador representa el paralelismo de las dos pseudocevianas asociadas a las dos variables involucradas, de manera que el triángulo objeto de análisis tiene un vértice impropio y resulta el valor infinito del área.

Por otro lado, puesto que (I) es una expresión cíclicamente simétrica en las variables r_1, r_2, r_3 , asignando las mismas de esta manera cíclica a cada lado de un triángulo escaleno ABC, se deriva que para ternas de valores con, al menos, dos de ellos distintos, incluido el mencionado caso ceviano, resultan tres triángulos distintos equivalentes, de lados cada terna de pseudocevianas así definidas. Hacemos notar que la significación geométrica del término equivalente, hace referencia a figuras y sólidos de formas distintas que tienen igual área o volumen.

Además, si se considera la terna de valores inversos $1/r_1, 1/r_2, 1/r_3$, teniendo en cuenta que para asignaciones de cualquier par $r_i, 1/r_i$ en un mismo lado, los dos puntos correspondientes resultan simétricos respecto del punto medio del lado, si se cumple la desigualdad indicada y se disponen en el triángulo base en el orden cíclico inverso del anterior, esto

es, ordenadas cada una de las ternas de valores numéricos r_1, r_2, r_3 y $1/r_1, 1/r_2, 1/r_3$ en los respectivos sentidos dextrorsum/sinistrorsum, resultan otros tres triángulos también equivalentes con los tres anteriores. La representación en la FIG.2 de los puntos M_2, N_2, P_2 y del triángulo $U_2V_2W_2$, corresponde ahora a valores $r_1=1/2$, $r_2=1/3$, $r_3=2/3$, dispuestos ya en el orden inverso citado. Observamos que en la ordenación sinistrorsum de la segunda terna, que implica la sustitución paralela alternativa del significado geométrico del par de valores r_2, r_3 , existe un solo vértice en cada triángulo, cuyo simétrico respecto del punto medio del lado es, asimismo, un vértice de su triángulo homólogo en la ordenación de la terna primera (en las figuras 1 y 2, el par M_1, M_2 correspondiente al lado BC). Observamos también que, en virtud de la proporcionalidad establecida por el segundo teorema de Tales, las dos rectas definidas por los otros dos pares, N_1, P_2 y P_1, N_2 , son ambas paralelas a la alineación BC, que es común en las representaciones efectuadas de cada triángulo.

El número total, seis, de triángulos equivalentes así deducidos, se reduce a solo dos triángulos distintos en el supuesto $r_1=r_2=r_3$ por las multiplicidades conexas producidas, como

corresponde al caso de referencia destacado por Vergés y origen de nuestro comentario.

Asimismo, en el supuesto indicado del teorema de Ceva, esto es, si las rectas AM, BN, CP son concurrentes en un punto Q, se cumple la condición $r_1 r_2 r_3 - 1 = 0$, que se expresa también en la forma alternativa $(-r_1)(-r_2)(-r_3) + 1 = 0$; y, puesto que los tres valores opuestos $-r_1, -r_2, -r_3$ corresponden a los puntos conjugados de cada vértice ceviano, M, N, P, respecto de cada uno de los pares BC, CA, AB, que son tres puntos alineados en la recta armónica asociada de Q, se deduce también, por esta vía indirecta, la propiedad específica definitoria del Teorema de Menelao, relativo a las intersecciones de los lados del triángulo básico con una recta cualquiera.

El análisis más detallado, con una deducción elemental completa de (I) y de otras propiedades y observaciones complementarias, asociadas, de nuevo, de forma dual, a ambos Teoremas de Menelao y de Ceva, pueden seguirse también por los interesados en el blog de la web personal www.prubper.com. ■



MEMORIA 2013

Ya disponible en la web

www.ciccp.es