



Colegio de
Ingenieros de Caminos,
Canales y Puertos

VOZ

DEL COLEGIADO

Esta publicación es el órgano de expresión de las opiniones y comentarios personales sobre temas colegiales y profesionales y sobre cualquier aspecto colegial.

Los autores son los únicos responsables de las opiniones emitidas e informaciones contenidas en sus escritos. Los autores serán responsables de respetar los derechos de terceros y de aportar información veraz y lícita.

Condiciones técnicas de las comunicaciones remitidas a 'La Voz del Colegiado'

- Su extensión no debe exceder de dos folios DIN A4 escritos a simple espacio en letra del cuerpo 12.
- El idioma empleado será el castellano.
- Serán publicadas según el orden de recepción en el Colegio y ajustándose a las disponibilidades de espacio.
- Se evitará la publicación de más de tres opiniones de un mismo colegiado dentro del mismo año natural, con el objeto de facilitar el máximo número de aportaciones a 'La Voz del Colegiado'.
- Los temas de debate se cerrarán en un máximo de tres números, advirtiéndose en el segundo número que el asunto cerrará en la siguiente publicación.

OPINIONES

El triángulo amigo: el invariante ceviano

por Pablo Rubio Pérez

Colegiado nº 1.588

Como vengo repitiendo con fruición, la figura del triángulo, símbolo de creatividad permanente en ciencias y artes, anterior a la construcción de las Pirámides, ha sido la más estudiada por geómetras de todos los tiempos. En los años más que lejanos, mediados del siglo anterior, de preparación para el ingreso en nuestra vieja Escuela de Retiro, entonces anhelada y ahora añorada, el texto de Rouché-Comberousse, una de las herramientas imprescindibles para el asalto, suponía un excelente compendio del conocimiento geométrico más actualizado en su momento, que incluía en su Première Partie, Géométrie Plane, la Note III, Sur la géométrie récente du triangle, ilustrada con excelentes gráficas complejas, hoy valiosas, que sufrimos primero por inabordables y disfrutamos más adelante, una vez consolidada la imprescindible formación matemática.

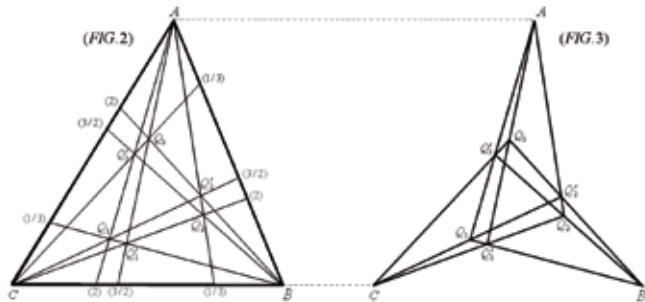
En esta etapa postrera de vida, liberado, como decía Platón en su senectud, de una multitud de tiranos, aunque sometido a la crueldad de la enfermedad innombrable de la persona querida y, más que necesaria, imprescindible, tras nuestros

ya 54 años de vida en común, el triángulo sigue siendo el amigo generoso y callado, venero inagotable que me procura con sus descubrimientos momentos, sólo momentos, de evasión intelectual, que no sentimental, paliativa.

En la opinión antecedente, "El triángulo mítico: la configuración ceviana", deducimos la que denominamos configuración ceviana en base a su propia generación a partir de seis grupos de tres rectas cevianas asociadas a una terna invariable de sus parámetros respectivos r_1, r_2, r_3 , que son las abcisas relativas de los puntos de intersección con los lados correspondientes, cumpliéndose la condición expresiva del teorema de Ceva,

$$r_1, r_2, r_3 = 1 \quad (I)$$

Reproducimos aquí nuevamente las figuras 2 y 3, conservando también su numeración anterior, que son a su vez expresivas de la generación y representación de una configuración particular (9_3) , que venimos llamando ceviana.



Figs. 2 y 3

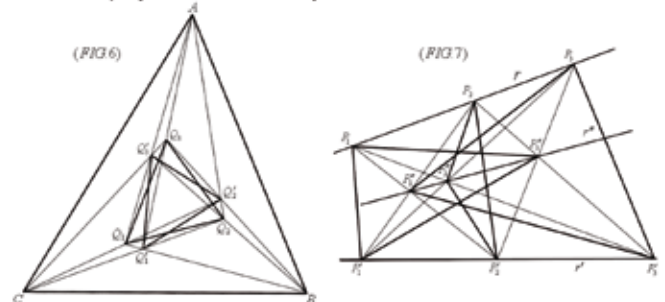
Se estableció también en la opinión anterior la identificación de la (Fig. 3) como caso particular especial del hexágono de Pappus, cuya singularidad se justifica con base en la segunda de las dos consideraciones siguientes.

En primer lugar, el conjunto de los seis puntos cevianos, se divide en dos subconjuntos que corresponden a las asignaciones de las variables r_1, r_2, r_3 a los lados de manera cíclica en cada uno de los respectivos sentidos dextrorsum/sinistrorsum. Resultan así los dos triángulos respectivos $Q_1Q_2Q_3$ y $Q'_1Q'_2Q'_3$ (Fig. 6), deducidos, como decimos, a través de sendas rotaciones dextrógira y levógira de la terna r_1, r_2, r_3 , ilustradas en las notaciones incluídas en la (Fig. 2), y de la simple inspección de los triángulos de la terna $ABC, Q_1Q_2Q_3, Q'_1Q'_2Q'_3$, se deriva que los tres triángulos tienen comportamientos proyectivos simétricos y, en concreto:

Dos triángulos son triángulos cevianos del tercero y también triplemente homólogos, y los centros de homología correspondientes son los vértices del triángulo tercero. Se comprueba asimismo directamente que los tres triángulos $P_1P'_1P''_1, P_2P'_2P''_2, P_3P'_3P''_3$, homólogos de los tres anteriores, representados en la (Fig. 7) de Pappus, verifican la misma propiedad entre sí. Observamos que esta propiedad triple homológica no se cumple, en general, en el caso de una homología simple de un par de triángulos.

En segundo lugar, se obtienen además las siguientes relaciones métricas, éstas específicas ya de la configuración ceviana, esto es, no verificables en general en la terna triangular de la (Fig. 7), cuya deducción y formulaciones algébricas detalladas las encontrarán los interesados, como ampliación de esta opinión, en el blog de www.prubper.com.

Dos triángulos son triángulos cevianos del tercero para una misma terna de valores específica de este tercer triángulo y asignada, de nuevo, en uno u otro sentidos cíclicos inversos.



Figs. 6 y 7

La terna inicial r_1, r_2, r_3 , relativa al triángulo ABC , tiene sus análogas, ¡distintas las tres!, correspondientes a los triángulos $Q_1Q_2Q_3$ y $Q'_1Q'_2Q'_3$, considerados sucesivamente como el triángulo básico de referencia, cuyos pares de triángulos asociados cevianos son ahora $(ABC, Q'_1Q'_2Q'_3)$ y $(ABC, Q_1Q_2Q_3)$

En consecuencia, las coordenadas baricéntricas absolutas de los vértices de un triángulo, esto es, las áreas de los tres triángulos cuyos vértices son dos vértices del triángulo base y un vértice del triángulo ceviano seleccionado, determinan igualmente ternas integradas por tres valores idénticos, aunque las correspondencias de cada valor con un lado del triángulo base varían como decimos en un sentido cíclico para cada uno de los tres vértices del ceviano.

Además, designando por $S(ABC)$ el área de un triángulo y por $s(ABC)$ la suma de cuadrados de las longitudes de los lados, resultan respectivamente para cada triángulo $Q_1Q_2Q_3$ y $Q'_1Q'_2Q'_3$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S(Q_1Q_2Q_3)}{S(ABC)} &= \frac{s(Q_1Q_2Q_3)}{s(ABC)} = \frac{1 - r_1 + r_1^2 - r_1r_2 - r_1^2r_2 + r_1^2r_2^2}{(1 + r_1 + r_1r_2)^2} \\ \frac{S(Q'_1Q'_2Q'_3)}{S(ABC)} &= \frac{s(Q'_1Q'_2Q'_3)}{s(ABC)} = \frac{1 - r_2 + r_2^2 - r_2r_1 - r_2^2r_1 + r_2^2r_1^2}{(1 + r_2 + r_2r_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Mediante aplicación de la condición (I), a partir de la selección de cada par de valores r_1, r_2, r_3 , es obvia la comprobación de tres formas análogas equivalentes, de cada uno de los dos valores numéricos que figuran como coeficientes-funciones del par r_1, r_2 en los últimos miembros de las relaciones métricas (II).

Se concluye, por tanto, la siguiente triple invariancia, que se cumple con carácter universal en cualquier configuración ceviana, esto es para una terna cualquiera r_1, r_2, r_3 que satisface la condición (I), motivo de la denominación del invariante ceviano que hemos dado a la razón común I_c .

$$I_e = \frac{S(ABC)}{s(ABC)} = \frac{S(Q_1 Q_2 Q_3)}{s(Q_1 Q_2 Q_3)} = \frac{S(Q'_1 Q'_2 Q'_3)}{s(Q'_1 Q'_2 Q'_3)} \quad (III)$$

El conjunto de las simetrías proyectivas descritas y de las propiedades comunes relativas a áreas y la triple simetría métrica definida por la expresión (III), existentes entre los miembros de esta terna triangular singular, pudiera interpretarse inclusive por algunos en el sentido mágico/mítico del triángulo al que nos hemos venido refiriendo en opiniones anteriores, aplicado aquí a esta triple figura triangular desde una dimensión superior alegórica, trascendida también, así, la racionalidad de su propia representación geométrica. ■

